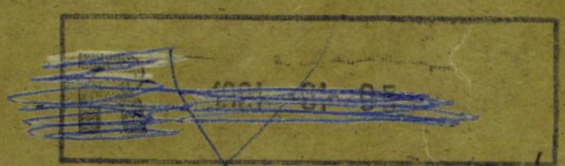
F 1130/3

L: 040961

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI



SERIA MECANICĂ

TOMUL LI, ANUL 1989

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil: Prof. dr. docent *Rodica Vîlcu*
Redactor responsabil adjunct: Prof. dr. docent *Traian Demian*
Secretar științific: Prof. dr. ing. *Sergiu Călin*
Membrii: Conf. dr. ing. *Cornel Berbente*; Prof. dr. docent *Gheorghe Buzdugan* membru corespondent al Academiei Române; Prof. dr. docent *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*: Prof. dr. ing. *Adelaida Mateescu*; Prof. dr. ing. *Nicolae Murguleț*: Prof. dr. ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș*; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Sfătaru*; Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. docent *Andrei Țugulea*; Prof. dr. ing. *Silvia Vaeu*; Academician *Radu Voinea*.

Editor: Institutul Politehnic București
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abrad can get subscriptions for this newspaper through ROMPRESFILATELIA, Import export press, P.O. Box 12-201, Telex 10378, Calea Griviței 62–64, Bucharest, ROMÂNIA

Sumar

C. Udrişte, O. Dogaru
Extreme condiţionate pe orbite 3

E. Grecu
Automorfisme involutive ale grupului simplectic(l. franceză) 11

O. Şandru, I. Şandru
Condiţii locale pentru ca un spaţiu Banach să fie λ-izometric cu un spaţiu Hilbert 15

V. Scridonesi—Călin
Funcţionale SCF energetice fitate prin structuri catastrofă (l. engleză) 19

T. Demian, C. Niţu
Uzura capetelor de imprimare matriciale 29

Gh. Iordache, Gh. Ene, T. Sima
Caracterizarea reologică a unor paste ceramice indigene 35

Şt. Staicu
O modelare a ecuaţiilor în dinamica sistemelor plane 41

Mihaela Păunescu, C. Tacă, Mariana Ştefănescu
Analiza stării de tensiuni în zona de îmbinare dintre corpul cilindric al unui recipient şi o flanşă plată sudată 49

E. Curatu
Matriee de reţele zonate pentru iluminare uniformă în instalaţii de microlitografiere . . . 59

D. Robescu, T. Petrovici, Sz. Lanyi, Anne—Marie Beşliu, I. Constantinescu
Epurarea apelor cu conţinut de hidrocarburi provenite de la bordul navelor comerciale . . 65

Al. Petcovici
Studiul termodinamic al golirii recipienţilor de capacitate limitată 71

I. Părăuşanu
Program pentru calculul turaţiilor critice ale rotorilor prin metoda elementelor finite . . . 83

C. Bălan
Asupra unor probleme de cinematica curgerii fluidelor viscoase 95

Summary

C. Udrişte, O. Dogaru
Constrained Extrema on Orbits 3

E. Grecu
Automorphisms Involutifs of Symplectic Group 11

O. Şandru, I. Şandru
Local Conditions for a Banach Space to Be λ-isometric to a Hilbert Space 15

V. Scridonesi—Călin
Energetic SCF Functionals Fitted by the Catastrophe Structures 19

T. Demian, C. Niţu
Wear in Matrix Printheads 29

Gh. Iordache, Gh. Ene, T. Sima
The Rheological Behaviour of Some Native Ceramic Pastes 35

Şt. Staicu
Modelling of Equations in Plane Systems Dynamic 41

Mihaela Păunescu, C. Tacă, Mariana Ştefănescu
Stress Analysis in Pressure Vessel Cylindrical Shell—Plane Flange Junction 49

E. Curatu
Zone Netwoorks Matrix for Uniform Humination in Microlithographying Installations . . 59

D. Robescu, T. Petrovici, Sz. Lanyi, Anne Marie Beşliu, I. Constantinescu
Technique and Equipment for Wastewater Purification, Resulted of the Board Ships 65

Al. Petcovici
The Thermodynamical Study upon Emptying Limited Capacity Tanks 71

I. Părăuşanu
Critical Speed Computer Program for Rotor Bearing System Using Finite Element Method 83

C. Bălan
Two Problems in Kinematics of Viscous Fluid Flow 95

C. Z.:517.9

EXTREME CONDIȚIONATE PE ORBITE

C. UDRIȘTE, O. DOGARU*

În această lucrare se prezintă metode de rezolvare a problemelor de extrem în care restricțiile sînt fixate printr-un sistem diferențial autonom.

§1 este un rezumat al teoriei orbitelor unui cîmp vectorial. §2 formulează problema de extrem în care legăturile sînt orbitele unui cîmp vectorial și prezintă metoda de rezolvare bazată direct pe definiție. §3 precizează condițiile în care se poate aplica metoda multiplicatorilor lui Lagrange. §4 adaptează teoria dezvoltată în [1], [2] la cazul concret al sistemelor Pfaff echivalente cu sisteme diferențiale simetrice . §5 prezintă două exemple.

§1. Orbitele unui cîmp vectorial

Fie D o mulțime deschisă și conexă din R^n și $X = (X^1, \ldots, X^n)$ un cîmp vectorial de clasă C^1 pe D. O curbă $\alpha : I \to D$, $\alpha(t) = (x(^1t), \ldots$ $\ldots, x^n(t))$ de clasă C^2 al cărui cîmp vectorial tangent α' coincide cu $X \circ \alpha$ se numește *linie de cîmp* a lui X. Imaginea $\alpha(I) \subset D$ a unei linii de cîmp se numește *orbită* a lui X.

Liniile de cîmp ale cîmpului vectorial X sînt soluții ale sistemului diferențial autonom

$$\frac{dx^i}{dt} = = X^i(x), i = 1, \ldots, n, x = (x^1, \ldots, x^n) \in D \qquad (1)$$

În consecință condițiile inițiale (t_0, x_0) determină unic o linie de cîmp. De asemenea fiecare linie de cîmp maximală este fie injectivă, fie simplă și închisă, fie constantă, iar orbitele sînt mulțimi disjuncte. Zerourile lui X generează linii de cîmp constante care se numesc *puncte de echilibru.*

Teoremă [3]. Dacă X este un cîmp vectorial de clasa C^1 pe D și $x_0 \in D$ este un punct în care $X(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinatate U a lui x_0 și $n-1$ funcții $f_i : U \to R$, $i = 1, \ldots, n-1$, funcțional independente pe U, astfel încît orbitele lui $X|U$ sînt descrise de sistemul cartezian implicit $f_1(x) = c_1, \ldots, f_{n-1}(x) = c_{n-1}$.

AMS Subject Classification : 49B10
Key words : extrema problems, differential equations as constraints
* Conf. dr.; Lector dr., catedra Matematici

Funcţiile f_i se numesc *integrale prime*.

Observaţie. Fie X un cîmp vectorial de clasă C^∞ pe $D \subset R^n$, $n \geqslant 3$, fără zerouri. Dacă $f_1(x) = c_1, \ldots, f_{n-1}(x) = c_{n-1}$ sînt orbitele lui X pe $U \subset D$, atunci există $f_n : U \to R$ astfel încît

$$X \mid U = f_n \operatorname{grad} f_1 \times \ldots \times \operatorname{grad} f_{n-1}.$$

Teoremă [3]. Orbitele cîmpului vectorial X sînt rectilinii dacă şi numai dacă $D_X X = \rho X$.

§ 2. Extreme cu legături descrise de un sistem diferenţial autonom

Definiţie. Fie $f : D \to R$ o funcţie de clasă C^1. Spunem că $x_0 \in D$ este un punct de minim (maxim) al lui f condiţionat de (1) dacă pentru linia de cîmp maximală $\alpha_{x_0} : I \to D$, $\alpha_{x_0}(t_0) = x_0$, există o vecinătate I_{t_0} a lui t_0 astfel încît $f(\alpha_{x_0}(t)) \geqslant (\leqslant) f(x_0)$, $\forall t \in I_{t_0} \subset I$.

Teoremă. Dacă $x_0 \in D$ este un punct de extrem al lui f condiţionat de sistemul diferenţial autonom (1), atunci x_0 este un punct în care Δf şi X sînt ortogonali.

În particular x_0 poate fi zero al lui X (punct de echilibru al sistemului dif. (1)) sau zero al lui Δf (punct critic liber al lui f).

Demonstraţie. Fie linia de cîmp $\alpha_{x_0} = (x^1, \ldots, x^n) : I \to D$, $\alpha_{x_0}(t_0) = x_0$ şi $\varphi_{x_0} : I \to R$, $\varphi_{x_0}(t) = f(\alpha_{x_0}(t))$. Deoarece t_0 este un punct de extrem liber pentru φ_{x_0} avem

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_{x_0}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\alpha_{x_0}(t)) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}(t) \Bigg|_{t=t_0} = (\Delta f(x_0), X(x_0)).$$

De aici rezultă că dacă $x_0 \in D$ este un punct de extrem al lui f condiţionat de (1) şi x_0 nu este un punct critic liber al lui f, atunci $X(x_0)$ aparţine hiperplanului tangent la hipersuprafaţa de nivel $f(x) = f(x_0)$ în punctul x_0. Cu alte cuvinte linia de cîmp ce trece prin x_0 la momentul t_0 este tangentă la hipersuprafaţa de nivel $f(x) = f(x_0)$ în punctul x_0.

Definiţie. Punctele $x \in D$ care sînt soluţii ale ecuaţiei

$$D_X f(x) = (\Delta f(x), X(x)) = 0$$

se numesc puncte critice ale lui f condiţionate de sistemul dif. (1).

Teoremă. Dacă $x_0 \in D$ este un punct critic condiţionat al funcţiei $f : D \to R$ de clasă C^2 cu legăturile (1) şi dacă numărul

$$\operatorname{Hess} f(X, X)(x_0) + (\nabla f, D_X X)(x_0)$$

este strict pozitiv (negativ), atunci x_0 este un punct de minim (maxim) al lui f condiţionat de (1).

Demonstrație. Fie linia de cîmp $\alpha_{x_0} = (x^1, \ldots, x^n) : I \to D$, $\alpha_{x_0}(t_0) = x_0$ și $\varphi_{x_0} : I \to R$, $\varphi_{x_0}(t) = f(\alpha_{x_0}(t))$. Atunci

$$\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_0}(t_0) = (t - t_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_{x_0}(t) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi_{x_0}(t_0) + \theta((t - t_0)^2).$$

Pe de altă parte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_{x_0}(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(\alpha_{x_0}(t))\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi_{x_0}(t) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^x}(\alpha_{x_0}(t))\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(\alpha_{x_0}(t))\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}.$$

Deoarece α_{x_0} este o linie de cîmp, se satisface sistemul (1). Prin derivare în (1) obținem

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(\alpha_{x_0}(t))\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}.$$

Dacă x_0 este un punct critic condiționat al lui f, atunci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_{x_0}(t_0) = (\nabla f(x_0),\ X(x_0)) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi_{x_0}(t_0) = \mathrm{Hess}\ f(X, X)(x_0) + (\nabla f, D_X X)(x_0)$$

Ipoteza din teoremă implică faptul că diferența $\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_0}(t_0)$ este sau strict pozitivă sau strict negativă.

Consecință. Fie x_0 un punct critic al lui $f : D \to R$ condiționat de (1). Dacă orbitele lui X sînt rectilinii și dacă Hess $f(x_0)$ este definită, atunci x_0 este un punct de extrem condiționat.

Demonstrație. $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi_{x_0}(t) = \mathrm{Hess} f(X, X)(\alpha_{x_0}(t))$.

Din cele de mai sus se desprinde o metodă de a determina extremele unei funcții $f : D \to R$ cu legăturile (1). Fie C mulțimea punctelor critice condiționate ale lui f, mulțime descrisă de ecuația $h(x) = 0$, unde $h(x) = (\Delta f(x), X(x))$. Fie $g : D \to R$, $g(x) = \mathrm{Hess}\ f(X, X)(x) + (\Delta f, D_X X)(x)$. Natura punctelor critice va fi decisă de semnul funcției g pe mulțimea C. Această cale este laborioasă, deoarece presupune rezolvarea sistemului algebric $h(x) = 0$, $g(x) = 0$ (mulțimea punctelor „îndoielnice"). Metoda prezentată în §4 face abordabilă rezolvarea acestui sistem. În ceea ce privește natura unui punct critic condiționat x_0 pentru care $h(x_0) = 0$,

$g(x_0) = 0$, aceasta poate fi decisă în principiu prin exprimarea derivatelor $\frac{d^3}{dt^3}\varphi_{x_0}(t_0)$, $\frac{d^4}{dt^4}\varphi_{x_0}(t_0)$, ... în funcţie de $X(x_0)$.

§ 3. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $x_0 \in D$ cu proprietatea $X(x_0) \neq 0$. Atunci, pe o vecinătate U a lui x_0, orbitele lui X sînt descrise prin ecuaţii carteziene implicite

$$(2)\quad f_1(x) = c_1, \ldots, f_{n-1}(x) = x_{n-1}$$

Fie $d : D \to R$ de clasă C^2. Extremele lui $f|U$ condiţionate de (1) sînt extremele lui $f|U$ condiţionate de (2). Conform teoriei clasice pentru decizie se poate folosi familia după $(c_1, \ldots, c_{n-1})$ de funcţii Lagrange (pe U)

$$\Phi = f + \lambda_1(f_1 - c_1) + \ldots + \lambda_{n-1}(f_{n-1} - c_{n-1})$$

Această metodă nu se poate aplica efectiv decît în cazurile particulare în care se pot explicita integralele prime. Altfel ea rămîne doar o metodă de principiu.

§ 4. Utilizarea ecuaţiilor Pfaff

Fie $X = (X^1, \ldots, X^n)$ un cîmp vectorial, fără zerouri, de clasă C^1 pe o mulţime deschisă şi conexă $D \subset R^n$. Orbitele lui X sînt caracterizate de sistemul simetric

$$\frac{dx^1}{X^1(x)} = \ldots = \frac{dx^n}{X^n(x)}.$$

Acesta este echivalent cu un sistem (complet integrabil) de $n - 1$ ecuaţii Pfaff, de exemplu

$$\begin{cases} -X^n(x)dx^1 + X^1(x)dx^n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ -X^n(x)dx^{n-1} + X^{n-1}(x)dx^n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

care, pentru $n \geqslant 3$, pot fi (separat) complet integrabile sau nu.

Cîmpul vectorial X se poate recupera din cîmpurile vectoriale

$$(-X^n, 0, \ldots, 0, X^1), (0, -X^n, \ldots, 0, X^2), \ldots, (0, 0, \ldots, -X^n, X^{n-1})$$

întrucît produsul vectorial al acestora din urmă este $(X^n)^{n-2}X$.

Fie $f: D \to R$ de clasă C^2. Extremele lui f condiționate de (1) sînt extremele lui f condiționate de (3). Conform teoriei dezvoltate în [1], [2], punctele critice condiționate sînt soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} - \lambda_1 X^n = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^{n-1}} - \lambda_{n-1} X^n = 0, \frac{\partial f}{\partial x^n} + \\ + \lambda_1 X^1 + \ldots + \lambda_{n-1} X^{n-1} = 0,$$

Forma pătratică care poate decide tipul unui punct critic x_0 este

$$\mathrm{d}^2 f(x_0) + \lambda_1 \left[-\mathrm{d}x^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^n}{\partial x^i}(x_0)\mathrm{d}x^i + \mathrm{d}x^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x^i}(x_0)\,\mathrm{d}x^i \right] + \\ + \ldots + \lambda_{n-1} \left[-\mathrm{d}x^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^n}{\partial x^i}(x_0)\mathrm{d}x^i + \mathrm{d}x^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^{n-1}}{\partial x^i}(x_0)\,\mathrm{d}x^i \right]$$

cu legăturile

$$\begin{cases} -X^n(x_0)\mathrm{d}x^1 + X^1(x_0)\mathrm{d}x^n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ -X^n(x_0)\mathrm{d}x^{n-1} + X^{n-1}(x_0)\mathrm{d}x^n = 0. \end{cases}$$

Observație. Pe D considerăm sistemul Pfaff

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k(x)\mathrm{d}x^i = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

unde $\omega_i^k: D \to R$ sînt funcții de clasă C^1. Dacă rang $[\omega_i^k(x)] = n-1$, $\forall x \in D$, atunci sistemul Pfaff (4) este complet integrabil. Într-adevăr, în acest caz, sistemul (4) este echivalent cu un sistem simetric

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{X^1(x)} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x^n}{X^n(x)}, \quad \sum_{i=1}^{n} (X^i(x)^2 > 0$$

și deci imaginile curbelor integrale ale lui (4) sînt orbite ale cîmpului vectorial $(X^1, \ldots, X^n)$. De aceea prin fiecare punct $x_0 \in D$ trece o singură curbă integrală (varietate integrală de dimensiune maximă). În consecință extremele lui $f: D \to R$ condiționate de (4) sînt extreme uniform condiționate [1], [2].

Să vedem ce relație există între problema extremelor condiționate de un sistem Pfaff (4) și problema extremelor condiționate de una dintre ecuațiile sistemului. Fie C mulțimea punctelor critice ale lui $f: D \to R$, condiționate de sistemul (4). Fie C_k mulțimea punctelor critice ale lui f condiționate de ecuația

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k(x)\mathrm{d}x^i = 0, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \tag{5}$$

ecuaţie ce nu este neapărat complet integrabilă. Fie E mulţimea punctelor de extrem condiţionat de sistemul (4) şi E_k mulţimea punctelor de extrem condiţionat de ecuaţia (5). Deoarece orice curbă integrabilă a sistemului (4) este o curbă integrală a ecuaţiei (5), rezultă incluziunile $E_k \subset E \subset C$, $E_k \subset C_k$ şi deci $E_k \subset C_k \subset E \cap C_k \subset C$. Aşadar, problema extremelor condiţionate de ecuaţia (5) poate fi tranşată uneori dacă este asociată cu problema extremelor condiţionate de sistemul (4); vezi exemplul 2.

§ 5. Exemple

1) Fie cîmpul vectorial $X = (y, z, x)$ pe R^3. În acest caz (1) devine sistem diferenţial liniar cu coeficienţi constanţi. Rezultă punctul de echilibru $(0, 0, 0)$ şi familia de linii de cimp de ecuaţii parametrice

$$x = c_1 e^t + e^{-t/2}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$y = c_1 e^t + e^{-t/2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_3 - \frac{1}{2}c_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$z = c_1 e^t + e^{-t/2}\left[-\frac{1}{2}c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right],\ t \in \mathrm{R}.$$

Sistemul simetric $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dx}{z}$ este echivalent cu perechea de ecuaţii Pfaff (sistem Pfaff complet integrabil) $\omega_1 = zdx - ydy = 0$, $\omega_2 = xdy - zdz = 0$, fiecare nefiind complet integrabilă.

Să găsim extremele funcţiei $f: R^3 - \{(0, 0, 0)\} \to R, f(x, y, z) = xz$ cu legăturile $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$

Punctele critice condiţionate ale lui f sînt soluţiile sistemului $z + \lambda_1 z = 0$, $-\lambda_1 y + \lambda_2 x = 0$, $x - \lambda_2 z = 0$, adică $(uv, -u^2 v, v)$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = u$, $v \neq 0$. Aceste puncte aparţin cuadricei $yz + x^2 = 0$.

Forma pătratică care poate decide tipul punctului critic este $-\lambda_1 dy^2 - \lambda_2 dz^2 + \lambda_2 dxdy + (2 + \lambda_1)\, dxdz$ cu $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = u$ şi cu legăturile $vdx + u^2 vdy = 0$, $uvdy - vdz = 0$. Deci $q(M) = (1 - 3u^3)dy^2$ poate decide tipul punctului critic $M(uv, -u^2 v, v)$, $v \neq 0$.

Dacă $u > \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, atunci M este punct de maxim uniform condiţionat.

Dacă $u < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, atunci M este punct de minim uniform condiţionat. Pentru $u = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ avem $q(M) = 0$ şi acesta nu poate decide tipul punctului critic

Pentru punctele critice de forma $N\left(\frac{v}{\sqrt[3]{3}}, -\frac{v}{\sqrt[3]{9}}, v\right) \neq 0$ vom face un calcul direct. Fie $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbb{R}$ curba integrală prin N a sistemului Pfaff $\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 0$. Deoarece aceasta este de fapt linia de cîmp a lui X prin $N = \alpha(t_0)$, avem $x' = y$, $y' = z$, $z' = x$ și pentru $\varphi(t) = f(\alpha(t)) = x(t)z(t)$ găsim

$$\varphi'(t_0) = y(t_0)z(t_0) + x^2(t_0) = 0,$$

$$\varphi''(t_0) = z^2(t_0) + 3x(t_0)y(t_0) = 0,$$

$$\varphi'''(t_0) = 2x(t_0)z(t_0) + 3y^2(t_0) = \sqrt[3]{q} = 0.$$

Deci N nu este punct de extrem.

2) Să determinăm, extremele funcției f cu legătura $\omega_1 = 0$ (vezi exemplul precedent). Punctele critice condiționate sînt soluțiile sistemului $z + \lambda z = 0$, $\lambda y = 0$, $x = 0$, adică puncte de forma $(0, 0, v)$, $\lambda = -1$ $v = 0$ și $(0, u, 0)$, $\lambda = 0$ și $u = 0$. Punctele critice $(0, u \neq 0, 0)$ se exclud deoarece nu sînt printre punctele critice condiționate de sistemul din exemplul precedent. Forma pătratică care poate decide natura punctelor critice rămase este $-\lambda dy^2 + (2 - \lambda)\, dxdz$ cu legătura $vdx = 0$. Deci $q(M) = dy^2$. Fiind vorba de o formă pătratică semidefinită natura punctelor critice rămase o putem decide prin considerații ca cele de la sfîrșitul exemplului precedent.

BIBLIOGRAFIE

1. *C. Udrişte, O. Dogaru*, Extrema with nonoholonomic constraints, Bul. IPB, Tom L, seria Energetică, p. 3–9, 1988
2. *C. Udrişte, O. Dogaru*, Mathematical programming problems with nonholonomic constraints, Seminarul de Mecanică, Univ. Timişoara, 1988.
3. *C. Udrişte*, Linii de cîmp, Editura tehnică, București, 1988.

Constrained Extrema on Orbits

This paper is about methods for solving the extrema problems in which the constraints are given by an autonomous differential system.

§1. is a summary of the theory of orbits of a vector field. §2 formulates the extrema problem in which the constraints are the orbits of a vector field and gives the solving method deriving directly from the definition. §3 specifies the conditions under wich we can apply the Lagrange multipliers method. §3 adapts the theory in [1$_0$], [2] to the concrete case of the Pfaff systems which are equivalent to symmetrical differential systems. §5 presents two examples.

C. Z.: 519.1

AUTOMORPHISMES INVOLUTIFS DU GROUPE SYMPLECTIQUE

E. GRECU*

Dans cet article nous déterminons certains automorphismes involutifs du groupe symplectique, parmi les automorphismes intérieurs de ce groupe, ainsi que le sous-groupe des éléments fixes des ces automorphismes.

***

On sait [5] que le groupe symplectique $Sp(2n, \mathrm{R})$ est formé par les matrices $A \in GL(2n, \mathrm{R})$, qui satisfont la relation

$$AM\tilde{A} = M \tag{1}$$

où $\tilde{A}$ est la transposée de la matrice A, et M est la matrice antisymétrique, d'ordre $2n$ ayant la forme cellulaire

$$M = \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$$

e étant la matrice unité d'ordre n, et 0 la matrice nulle d'ordre n. Les transformations linéaires

$$x'^i = \sum_{j=1}^{n} m^i_j x^j, \quad y'^i = \sum_{j=1}^{n} m^i_j y^j, \quad (i, \ldots, n)$$

du groupe $Sp(2n, \mathrm{R})$ laissent invariante la forme bilinéaire alternée

$$\sum_{i=1}^{n} (x^i y^{n+i} - y^i x^{n+i})$$

Soit B un élément fixe du groupe $Sp(2n, \mathrm{R})$, donc

$$BM\tilde{B} = M \tag{2}$$

* Lecteur dr., Chaire de mathématique

On sait [1] que l'application f: $Sp(2n, \mathrm{R}) \to Sp(2n, \mathrm{R})$ ainsi défini

$$f(A) = BAB^{-1} \tag{3}$$

est un automorphisme intérieur du groupe $Sp(2n, \mathrm{R})$.

On peut aisément vérifier que l'application f est une involution du groupe $Sp(2n, \mathrm{R})$ si et seulement si, quel que soit l'élément $A \in Sp(2n, \mathrm{R})$, est satisfaite la relation

$$AB^2 = B^2A$$

A cette fin il faut et il suffit que B^2 soit une matrice scalaire

$$B^2 = rE, \; r \neq 0$$

où E est la matrice unité d'ordre $2n$. En prenant les déterminants dans les deux membres, nous obtenons $|B|^2 = r^{2n}$. En tenant compte que $|B| = \pm 1$, il résulte que $r = \pm 1$.

Considérons la matrice B ayant la forme cellulaire

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont quatre matrices d'ordre n. Les relations (1), (2) sont équivalentes aux relations

$$\begin{cases} a^2+bc = re, \; ab + bd = 0, \quad ca + dc = 0, \; cb + d^2 = re \\ ab - ba = 0, \; cd - dc = 0, \; ad - bc = e, \end{cases}$$

I) Si $b = c = 0$, alors $a^2 = re$, $d = ra$, donc

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & ra \end{pmatrix}$$

II) Si $a = d = 0$, alors $b = -rb$, $c = rb^{-1}$. Nous avons

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ rb^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Observation. Pour $r = 1$ la matrice a est involutive et la matrice b est antisymétrique. Pour $r = -1$, la matrice a est antiinvolutive et la matrice b est symétrique.

Nous pouvons énoncer donc le suivant

Théorème. La matrice B ayant l'une des formes cellulaires

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = e \tag{4}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha} = -\alpha \tag{5}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\tilde{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = -e \tag{6}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha \tag{7}$$

engendre un automorphisme involutif du groupe symplectique.

Le sous-groupe des éléments fixes de l'automorphisme involutif (3) engendré par les matrices B ayant l'une des formes (4), (5), (6), (7) est formé de matrices A ayant la forme cellulaire

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

où A_1, A_2, A_3, A_4 sont quatre matrices d'ordre n, qui satisfont respectivement les relations

$$A_1\alpha = \alpha A_1, \quad A_2\tilde{\alpha} = \alpha A_2, \quad A_3\alpha = \tilde{\alpha}A_3, \quad A_4\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}A_4; \quad \alpha^2 = e \tag{4'}$$

$$A_1\alpha = \alpha A_4, \quad A_2\alpha^{-1} = \alpha A_3; \quad \tilde{\alpha} = -\alpha \tag{5'}$$

$$A_1\alpha = \alpha A, \quad A_2\tilde{\alpha} = -\alpha A_2, \quad A_3\alpha = -\tilde{\alpha}A_3,$$

$$A_4\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}A_4; \quad \alpha^2 = -e \tag{6'}$$

$$A_1\alpha = \alpha A_4, \quad A_2\alpha^{-1} = -\alpha A_3; \quad \tilde{\alpha} = \alpha \tag{7'}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. *J. Dieudonné*, On the automorphisms of the classical groups. Mem. Amer. Math. Soc., No. 2, 1951.
2. *B. R. Mc. Donald*, Automorphism of GL (R). Trans. Amer, Mat. Soc. 246 (1978), 155—171.
3. *L. K. Hua, I. Reiner*, Automorphisms of the unimodular group. Trans. Amer. Math. Soc., 71(1951), 331—348.
4. *A. A. Johnson*, The automorphisms of the orthogonal groups Ω_n (V), n> 5. J. Reine Angew, Math. 298 (1978), 112—155.
5. *O. T. O'Meara*, Symplectic groups. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.
6. *G. Vranceanu*, La géométrisation des espaces symplectiques. C. R. Acad. Sc. Paris, 229 (1949) 336—338.
7. *C. H. Wan*, Automorphisis of the modular group. Advances in Math., 3(1957), 216—233.

Automorfisme involutive ale grupului simplectic

În acest articol sînt determinate anumite automorfisme involutive ale grupului simplectic, printre automorfismele interioare ale acestui grup, precum și subgrupurile elementelor fixe ale acestor automorfisme.

C. Z.: 515.1

CONDIȚII LOCALE PENTRU CA UN SPAȚIU BANACH SĂ FIE λ-IZOMETRIC CU UN SPAȚIU HILBERT

O. ȘANDRU, I. ȘANDRU

În această lucrare vom arăta că proprietatea ca un spațiu Banach să fie λ-izometric, $\lambda \geqslant 1$, cu un spațiu Hilbert poate fi caracterizată cu ajutorul relațiilor care există între subspațiile finit dimensionale ale spațiului Banach dat.

(I) Definiții

1. Dacă X și Y sînt două spații Banach, spunem că Y este λ-finit reprezentat în X (pentru $\lambda = 1$ vom spune simp'u că Y este finit reprezentat în X), dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice subspațiu $Y' \subset Y$ de dimensiune finită există un subspațiu $X' \subset X$ și o bijecție liniară $T : X' \to Y'$ astfel încît : $\| x \|_X \leqslant \| T(x) \|_Y \leqslant (\lambda + \varepsilon) \| x \|_X$, $x \in X'$.

2. Un spațiu Banach X spunem că satisface proprietatea de λ-finit reprezentare (sau finit reprezentare dacă $\lambda = 1$) universală dacă X este λ-finit reprezentat (finit reprezentat) în orice spațiu Banach Y infinit dimensional.

3. Două spații Banach X și Y sînt λ-izometrice (dacă $\lambda = 1$ spunem că X și Y sînt izometrice) dacă există o bijecție liniară $T : X \to Y$ astfel încît : $\| x \|_X \leqslant \| T(x) \|_Y \leqslant \lambda \| x \|_X$, $x \in X$.

(II) Prezentarea principalelor rezultate

Teorema 1: Un spațiu Banach X este λ-izometric cu un spațiu Hilbert dacă și numai dacă X satisface proprietatea de λ-finit reprezentare universală.

Teorema 2. Dacă spațiu' Banach X este λ-izometric cu un spațiu Hilbert, atunci relația de izomorfism între subspațiile finit dimensionale ale lui X este echivalentă cu relația de λ^2-izometrie. Invers, dacă relația de izomorfism între subspațiile finit dimensionale ale unui spațiu Banach X este echivalentă cu relația de λ-izometrie, atunci X este λ-izometric cu un spațiu Hilbert.

* Asist., catedra Matematici; Prof., Șc. nr. 7 Cîmpulung

Pentru $\lambda = 1$, teoremele 1 şi 2 se reformulează astfel :

Teorema 1 : Un spaţiu Banach X este spaţiu Hilbert dacă şi numai dacă satisface proprietatea de finit reprezentare universală.

Teorema 2' : Un spaţiu Banach X este spaţiu Hilbert dacă şi numai dacă relaţia de izomorfism între subspaţiile finit dimensionale ale lui X este echivalentă cu relaţia de izometrie.

(III) Demonstraţii

Lema 1 : Dacă spaţiul Banach X este λ-finit reprezentat în l^2, atunci X este λ-izometric cu un spaţiu Hilbert.

Demonstraţie : Deoarece X este λ-finit reprezentat în l^2, pentru orice $\varepsilon > 0$ fixat, orice subspaţiu finit dimensional $X' \subset X$ este $(\lambda + \varepsilon)$-izometric cu un subspaţiu din l^2 şi în ultimă instanţă chiar cu l^2 (dim X').

În consecinţa, folosind următorul rezultat :

„Fie X un spaţiu Banach pentru care există $\lambda \geqslant 1$ astfel încît orice subspaţiu finit dimensional $X' \subset X$ este λ-izometric cu l^2(dim X'). Atunci X este λ-izometric cu un spaţiu Hilbert", datorat lui J. I. Joichi (1), pentru $\varepsilon > 0$ fixat anterior, spaţiul Banach X, l este $(\lambda + \varepsilon)$ izometric cu un spaţiu Hilbert, adică există o normă $U_\varepsilon(.)$ pe X care verifică identitatea paralelogramului :

$$2(U_\varepsilon^2(x) + U_\varepsilon^2(y)) = U_\varepsilon^2(x + y) + U_\varepsilon^2(x - y), \quad x, \ y \in X$$

şi pentru care

$$\|\cdot\|_X \leqslant U_\varepsilon(\cdot) \leqslant (\lambda + \varepsilon)\cdot\|\cdot\|_X, \text{ pe } X.$$

Fie $\mathscr{D}$ un ultrafiltru pe (0,1) mai fin decît filtrul generat de mulţimile $D_\varepsilon = (0, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$. Atunci, notînd cu

$$U_0(.) = \lim_{\mathscr{D}} U_\varepsilon(\cdot)$$

avem :

$$\|\cdot\|_X \leqslant U_0(\cdot) \leqslant \lambda\|.\|$$

Cum în plus $U_0(.)$ este o normă pe X, care verifică identitatea paralelogramului, demonstraţia este încheiată.

Observaţie : Pentru $\lambda = 1$, din lema 1, deducem că „orice spaţiu Banach finit reprezentat în l^2 este izometric cu un spaţiu Hilbert". De remarcat ca în acest caz există $\lim_{\varepsilon \leftarrow 0} U_\varepsilon(x)$, $\forall x \in X$ şi ca urmare putem defini norma $U_0 : X \to R_+$ punînd simplu $U_0(\cdot) = \lim_{\varepsilon \to 0} U_\varepsilon(\cdot)$.

Corolarul 1 : Dacă un spaţiu Banach X verifică proprietatea de λ-finit reprezentare universală atunci X este λ-izometric cu un spaţiu Hilbert.

Demonstraţie : Dacă spaţiul Banach X verifică proprietatea de λ-finit reprezentare universală, înseamnă printre altele că X este λ-finit

reprezentat în l^2, iar din lema 1 avem că X este λ-izometric cu un spațiu Hilbert.

Lema 2: În orice spațiu Hilbert toate subspațiile finit dimensionale izomorfe sînt izometrice.

Demonstrație: Fie H un spațiu Hilbert și $H_1, H_2 \subset H$ două subspații oarecare de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\{h_1^1, \ldots, h_n^1\} \subset H_1$ și $\{h_1^2, \ldots, h_n^2\} \subset H_2$ sînt două baze ortonormate în H_1 respectiv H_2 atunci definim aplicația liniară și bijectivă $T: H_1 \to H_2$ prin condițiile: $T(h_i^1) = h_i^2, i = \overline{1, n}$.

Fie $x \in H_1$, $x = \alpha_1 h_1^1 + \alpha_2 h_2^1 + \ldots + \alpha_n h_n^1$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \|T(x)\|^2.$$

Lema 3: Dacă spațiul Banach X este λ-izometric cu un spațiu Hilbert, atunci toate subspațiile finit dimensionale ale lui X care sînt izomorfe între ele sînt de fapt λ^2-izometrice.

Demonstrație: Din ipoteză există un spațiu Hilbert H și o λ-izometrie $T_\lambda: X \to H$. Fie $X_1, X_2 \subset X$ două subspații finit dimensionale ale lui X astfel încît $\dim X_1 = \dim X_2$. Notăm cu $H_1 = T_\lambda(X_1)$, iar cu $H_2 = T_\lambda(X_2)$. Cum din $H_1 = \dim H_2$ din lema 2 deducem că există $T: H_1 \to H_2$ izometrie. Aplicația $\lambda(T_\lambda^{-1} \cdot T \cdot T_\lambda): X_1 \to X_2$ stabilește o λ^2-izometrie între X_1 și X_2. Într-adevăr $x \in X_1$, avem: $\|x_1\|_X \leqslant \|T_\lambda(x_1)\|_H = \|(T \cdot T_\lambda)(x_1)\|_H \leqslant \lambda\|(T_\lambda^{-1} \cdot T \cdot T_\lambda)(x_1)\|_X \leqslant \lambda\|(T \cdot T_\lambda)(x_1)\|_H = \lambda\|T_\lambda(x_1)\|_H \leqslant \lambda^2\|x_1\|_X$. Notînd cu $U = \lambda(T_\lambda^{-1} \cdot T \cdot T_\lambda)$, $U: X_1 \to X_2$, avem:

$$\|x_1\|_X \leqslant \|U(x_1)\|_X \leqslant \lambda^2\|x_1\|_X, \qquad x_1 \in X_1.$$

Lema 4: Fie X un spațiu Banach pentru care există $\lambda \geqslant 1$, astfel încît relația de izomorfism între subspațiile sale finit dimensionale este echivalentă cu relația de λ-izometrie. În aceste condiții X este λ-finit reprezentat în l^2.

Demonstrație: Fie $\varepsilon > 0$ și $Y' \subset X$ un subspațiu de dimensiune n. Ținînd cont de următoarea variantă a teoremei lui Dvoretzky, (2), „l^2 este finit reprezentat în orice spațiu Banach de dimensiune infinită", „pentru ε/λ există subspațiul $X' \subset X$ cu $\dim X' = n$ și o bijecție liniară $T: X' \to l^2(n)$, astfel încît $\|x\|_X \leqslant \|T(x)\|_2 \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\|x\|_X$. Cum Y' și X' sînt izomorfe căci $\dim Y' = \dim X'$, rezultă că Y' și X' sînt λ-izometrice, deci există $T_\lambda: Y' \to X'$ bijecție liniară astfel încît $\|y\|_X \leqslant \|T_\lambda(y)\|_X \leqslant \lambda\|y\|_X$, $\forall y \in Y'$. Compunerea $T \cdot T_\lambda: Y' \to l^2(n)$ satisface inegalitățile: $\|y\|_X \leqslant \|T_\lambda(y)\|_X \leqslant \|(T \cdot T_\lambda)(y)\|_2 \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\|T_\lambda(y)\|_X \leqslant (1 + \varepsilon/\lambda) \cdot \lambda\|y\|_X = (\lambda + \varepsilon)\|y\|_X$.

Corolarul 2: Fie X un spațiu Banach pentru care există $\lambda \leqslant 1$, astfel încît relația de izomorfism între subspațiile sale finit dimensionale este echivalentă cu relația de λ-izometrie. În aceste condiții, X este λ-izometric cu un spațiu Hilbert.

Demonstrație: Enunțul rezultă combinînd lemele 1 și 4. În acest moment demonstrația teoremei 2 decurge din lema 3 și corolarul 2.

Lema 5: Fie X, Y, Z trei spații Banach. Dacă X este λ-finit reprezentat în Y, și Y este μ-finit reprezentat în Z, atunci X este $\lambda\mu$-finit reprezentat în Z.

Demonstrație: Fie $\varepsilon > 0$ și $X' \subset X$ un subspațiu finit dimensional. Cum X este λ-finit reprezentat în Y, $\exists\, Y' \subset Y$, și $T : X' \to Y'$ o bijecție liniară astfel încît

$$\|x\|_X \leqslant \|T(x)\|_Y \leqslant [\lambda - (\lambda + \mu - \sqrt{(\lambda+\mu)^2 + 4\varepsilon^2})/2] \cdot \|x\|_X = \{[(\lambda - \mu) + \sqrt{(\lambda+\mu)^2+4\varepsilon^2}]/2\}\|x\|_X,\ x \in X'.$$

De asemenea, ținînd cont ca Y este λ-finit reprezentat în Z $\exists\, Z' \subset X$, $R : Y' \to Z'$ bijecție liniară astfel încît $\|y\|_Y \leqslant \|R(y)\|_Z \leqslant \left[\mu + \frac{-\lambda - \mu + \sqrt{(\lambda+\mu)^2 + 4\varepsilon^2}}{2}\right]\|y\|_Y = \frac{(\mu-\lambda) + \sqrt{(\lambda+\mu)^2 + 4\varepsilon^2}}{2}\|y\|_Y$, $y \in Y'$.

Aplicația $R \cdot T : X' \to Z'$ verifică inegalitățile: $\|x\|_Z \leqslant \|T(x)\|_Y \leqslant \|(R \cdot T)(x)\|_Z \leqslant \{[(\mu - \lambda) + \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + 4\varepsilon^2}]/2\}\|T(x)\|_Y \leqslant \{[(\lambda - \mu) + \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + 4\varepsilon^2}]/2\} \cdot \{[(\mu - \lambda) + \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + 4\varepsilon^2}]/2\}\|x\|_X = (\lambda\mu + \varepsilon)\|x\|_X$, $\forall\, x \in X'$.

Din lema 5, pentru $\lambda = 1$ rezultă:

Corolarul 3: Relația de finit reprezentare definită pe mulțimea spațiilor Banach este tranzitivă.

Corolarul 4: Orice spațiu Hilbert verifică proprietatea de finit reprezentare universală.

Demonstrație: Afirmația rezultă combinînd lemele 2, 4, teorema lui Dvoretzky și corolarul 3.

Corolarul 5: Orice spațiu Banach X care este λ-izometric cu un spațiu Hilbert satisface proprietatea de λ-finit reprezentare universală.

Demonstrație: Afirmația rezulta din corolarul 4 combinat cu lema 5.

În acest moment, demonstrația teoremei 1 rezultă din corolarele 1 și 5.

BIBLIOGRAFIE

1. *J. I. Joichi*, Normed linear spaces equivalent to inner product spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 423–426.
2. *J. L. Krivine*, Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulès — Anals of Mathematics, 104(1976), 1–29.

Local Conditions for a Banach Space to Be λ-isometric to a Hilbert Space

In the paper we shall prove that the property as a Banach space should be λ-isometric, λ> 1 to a Hilbert space may be characterised with the help of the relations which exist between the finit dimensional subspaces of the given Banach space.

C. Z.: 519.6

ENERGETIC SCF FUNCTIONALS FITTED BY THE CATASTROPHE STRUCTURES

V. SCRIDONESI–CĂLIN*

The energetic scf(selfconsistent field) functionals: the scf energy (I), the rotational increment of the scf energy (II) and the rotational „gradient" of the scf Lagrange multipliers (III) are conductibly fitted by the *catastrophe structures* (CSs). Though (I) — (III), in the scf theory, rise qualitatively distinct problems, by the *Catastrophe Theory* (CT). they reduce themselves to a *unique general problem* with the stages: (a) the finding of the polynomial form (I)—(III) possibly to be approximated by the *catastrophe potentials* (CPs) (or the unfoldings of the catastrophe); (b) the identification of the parameter α of the behaviour (or the state) for (a); (c) the inducing of the k-jets and the corresponding CPs; (d) the research of the extremum (minimum) and the critical points of the CSs that fit the hypersurfaces (I)—(III); (e) the computation and analysis of the integral quadratic error as a measure of the degree of the fitting of (I)—(III) by the CSs; and (f) the interpretation of the general results (a)—(e) by the peculiarity of the scf problems risen by (I)—(III).

1. Introduction

The principal physical-mathematical problems of the scf theory (and the method) applied to the multielectronic quantum systems (atomic, molecular, etc) [1] are treated by (or connected to) the functionals: the scf energy (E_{scf}) (I), the rotational increment of the scf energy (ΔE_{scf}) (II) and the rotational „gradient" of the scf Lagrange multipliers ($(\Delta e_{ij})_{scf}$) (III), the last, at the hermiticity, leading to the orbital energies ($\{e_i = -e_{ii}; i = j\}$). The energetic scf functionals (I) — (III), all being dependent on the set of the basic monoelectronic functions (2) (corresponding to the treated quantum electronic system), may be prepared for their approaching by the *Catastrophe Theory* (CT) [6]. The structure of this approach is (a) — (f) and solves a *unique general problem*. The scf problems as: the computation of the scf energy and of the orbital energies $\{e_i\}$, the scf convergence, the scf stability and instability, the number of the scf solutions, the hermiticity of the scf Lagrange multipliers, etc are directly connected to (I) — (III). The approach by the CT of the functionals (I) — (III) offers a new point of wiew, nonclassic (out of the classic scf frame), on the enumerated scf problems. In a multidimensional space, (I) — (III) represent hypersur-

* Assist., Physics Dept.

faces whose topological behaviour may be fitted by the *catastrophe structures* (CSs). The preparation of (I) — (III) for the approach by the CT will take into account the classic scf results [1—5, 7, 8] and the nonclassic results too, obtained by the author [11—13].

2. The General Polynomial Form $F_J = f(\alpha, \{c_m^J;\ m = \overline{1, n_J}\})$ of the Functionals (I)—(III)

The all energetic scf functionals (I) — (III), in the scf theory (and the method) [1, 2, 5, 7] being dependent on the set (2) of the basic monoelectronic functions corresponding to a quantum system with N electrons, may be transformed in polynomial dependences of the type :

$$F_J = f(\alpha,\ \{c_m^J;\ m = \overline{1, n_J}\})\ (J \in \{\mathrm{I, II, III}\} \equiv \mathcal{J}). \tag{1}$$

In (1) α represents the unique parameter of the behaviour (or the state) defining the monodimensional space of the behaviour (or the state) $\mathcal{S}_\alpha$, and $\{c_m^J\}$ a number n_J ($J \in \mathcal{J}$) of the control parameters defining the multidimensional space of the control $\mathcal{S}_c$. The control parameters are dependent on the basic monoelectronic functions :

$$\{|\varphi_i>,\ i = \overline{1, N}\}, \tag{2}$$

in the scf general and peculiar cases $\{c_m^J\}$ representing the combinations both of atomic and molecular integrals [11—13]. The parameter α is obtained : or (A) after a localization of the representative quantum state point $\psi(\{|\varphi_i>\})$ (ψ — the wave function of the quantum system) on the sphere of the normalization [4, 11], if $J = I$; or (B) after a unitary transformation of the type 2×2[3] plane rotation [9] of the pairs of the functions (2), if $J = \mathrm{II}$ and $J = \mathrm{III}$ [12, 13].

2. 1. *The Polynomial Form* $F_I = f(\alpha,\ \{c_m^I;\ m = \overline{1, n_I}\})$

The scf functional of the energy, E_{scf}(I), dependent on (2), by ψ, we consider it of the form [4, 11] :

$$E_{scf} = E_1 \sin 2\alpha + E_2 \cos 2\alpha + E_3 \sin \alpha + E_4 \cos\alpha + E_5 \tag{1'}$$

corresponding to a helium-like quantum system treated in the multiconfigurational scf (mc-scf) variant. The parameter α, in the case (A), permites the rewriting of (1') :

$$F_I = E_{scf} = c_1^I x^2 + c_2^I xy + c_3^I x + c_4^I y + c_5^I, \tag{1$_I$}$$

with $\{c_m^I;\ m = \overline{1, 5}\}$ combinations of the scf energy coefficients ($\{E_i;\ i = \overline{1, 5}\}$) [11] and

$$x = \sin\alpha;\ y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\ (\alpha \in [-\Pi, +\Pi] \text{ or } x \in [-1, +1]) \tag{3}$$

2. 2. The Polynomial Form $F_{II} = f(\alpha\,;\ \{c_m^{II}\,;\ m = \overline{1, n_{II}}\})$

The scf energy rotational increment, $\Delta E_{scf}(II)$, dependent also on (2), may be obtained applying the pairs of the functions $\{|\varphi_i>\ ,\ |\varphi_j>\}$ a 2×2[3] plane rotation [9] of the angle α. The general form of ΔE_{scf} is formally obtained the same : or generalising [12] the peculiar expressions ΔE_{scf}(atomic [2, 5] and molecular [8], or starting from the general expression of the scf functional (I) [10]. For a multielectronic system of the closed-shell type in the mc-scf variant, (I) has the condensed form :

$$F_{II} \equiv \Delta E_{scf} = c_1^{II}x^4 + c_2^{II}x^3y + c_3^{II}x^2 + c_4^{II}xy + c_5^{II}. \qquad (1_{II})$$

with $\{c_m^{II}\,;\ m = \overline{1, 5}\}$ specified in [12], x and y defined by (3), but with α newly specified (B). The formal difference between (1_{II}) obtained in [10] and that obtained in [12] is $c_5^{II} = 0$ in [10], nonsignificant in the general treating by the CT of (1_{II}).

2. 3. The Polynomial Form $F_{III} = f(\alpha,\ \{c_m^{III}\,;\ m = \overline{1, n_{III}}\})$

The rotational „gradient" of the scf Lagrange multipliers, $(\Delta e_{ij})_{scf}(III)$, obtained as (II) also by a 2×2 plane rotation of the angle $\alpha(B)$, according to [7a], has a complicated mathematical expression that in the condensed form is the simple polynomial [13] :

$$F_{III} = (\Delta e_{ij})_{scf} = c_1^{III}x^2 + c_2^{III}xy + c_3^{III}x + c_4^{III}y + c_5^{III}. \qquad (1_{III})$$

The coefficients $\{c_m^{III}\,;\ m = \overline{1, 5}\}$ from (1_{III}) have the explicit expressions given in [13], x and y defined by (3) and α newly specified for $J = III$. From (1_I) and (1_{III}) we notice the formal identity of the polynomial dependences E_{scf} and $(\Delta e_{ij})_{scf}$, a significant fact for (I) and (III) which represent scf energies : (I) the scf total electronic energy, respectively (III) the scf orbital energies (at the accomplishment of the hermitian condition of the scf Lagrange multipliers). This formal identity makes (1_I) and (1_{III}), in this application of the CT, to appear directly as a unique problem. For the increment ΔE_{scf}, the appearance of the terms of the degree 3, respectively 4 in x is significant, contributing to the qualitative separation of (II) from (I) and (III), even when we will apply the CT at the fitting of the hypersurfaces (1_J) $(J \in \mathcal{J})$ by the CSs.

2. 4. The General Polynomial Form $F_J = f(\alpha,\ \{c_m^J\,;\ m = \overline{1, n_J}\})$

The dependences, formally identical (1_I) and (1_{III}), in fact, may apper as the peculiar cases of a polynomial dependence generalising (1_{II}) :

$$F_J = f(\alpha,\ \{C_m^J\,;\ m = \overline{1, 7}\}) = C_1^Jx^4 + C_2^Jx^3y + C_3^Jx^2 + C_4^Jxy + C_5^Jx + C_7^Jy + C_7^J, \qquad (4)$$

from which (1_I) and (1_{III}) are easily obtained by :

$$C_1^J = C_2^J = 0 (J = I,\ III), \qquad (4')$$

and (1_{II}) for :

$$C_6^J = C_7^J = 0 (J = II). \tag{4''}$$

In a multidimensional space $\hat{\mathcal{S}}_\alpha \otimes \hat{\mathcal{S}}_c$, (4) represents a hypersurface whose topological behaviour may be fitted by the CSs, if (4) (or(i_J) $(J \in \mathcal{J})$) is approximated by the *catastrophe potentials* (CPs) (or the unfoldings of the catastrophe.). Because the behaviour (or the state) parameter α defined by (3) and (A) or (B) is unique,

$$\text{Corank } (F_J) = 1 \ (J \in \mathcal{J}), \tag{4'''}$$

all the CSs which will fit (4) (or 1_J $(J \in \mathcal{J})$) will be of the cuspoid type [6].

3. The Application of the CT at the Fitting of the Energetic SCF Functionals (I)—(III) by the CSs

Aiming at the application of the CT [6] at the fitting of the functionals (I) — (III) (with analytical explicit forms (i_J) $(J \in \mathcal{J})$) of the generalised form, we eliminate the upper index J from (4) and we have :

$$F_J \equiv f(\alpha, \{C_m; m = \overline{1,7}\}) = C_1 x^4 + C_2 x^3 y + C_3 x^2 + C_4 xy + C_5 x + C_6 y + C_7. \tag{5}$$

3.1. *The Induction of the K — Jets* $F_J^{(k)}((k) = 2n(n = 0; \overline{1, 3}))$

If we take into account tthe definition (3) of the behaviour (state) parameter α and we develop y in the Taylor series [6] :

$$y = (1 - x^2)^{1/2} = 1 - \left(\frac{1}{2} x^2 + 2^{-3} x^4 + 2^{-4} x^6 + \ldots\right), \tag{6}$$

then (5) leads to the k-jets of the orders $(k) = 2n(n = 0; \overline{1, 3})$, if we cut off the expansion (6) from the term in x^8 :

$$F_J^{(0)} = a_J^{(0)} x^4 + b_J^{(0)} x^3 + c_J^{(0)} x^2 + d_J^{(0)} x + e_J^{(0)}, \tag{7}$$

with $a_J^{(0)} = C_1$, $b_J^{(0)} = C_2$, $c_J^{(0)} = C_3$, $d_J^{(0)} = C_4 + C_5$ and $e_J^{(0)} = C_6 + C_7$; (7′)

$$F_J^{(2)} = a_J^{(2)} x^5 + b_J^{(2)} x^4 + c_J^{(2)} x^3 + d_J^{(2)} x^2 + e_J^{(2)} x + f_J^{(2)}, \tag{8}$$

with $a_J^{(2)} = -\frac{1}{2} b_J^{(0)}$, $b_J^{(2)} = a_J^{(0)}$, $c_J^{(2)} = C_2 - \frac{1}{2} C_4$, $d_J^{(2)} = C_3 - \frac{1}{2} C_6$,

$$e_J^{(2)} = d_J^{(0)} \text{ and } f_J^{(2)} = e_J^{(0)}; \tag{8'}$$

$$F_J^{(4)} = a_J^{(4)} x^7 + b_J^{(4)} x^5 + c_J^{(4)} x^4 + d_J^{(4)} x^3 + e_J^{(4)} x^2 + f_J^{(4)} x + g_J^{(4)}, \tag{9}$$

with $a_J^{(4)} = -2^{-3} b_J^{(0)}$, $b_J^{(4)} = -\frac{1}{2}(C_2 + 2^{-2} C_4)$, $c_J^{(4)} = C_1 - 2^{-3} C_6$, $d_J^{(4)} =$

$$= c_J^{(2)}, \ e_J^{(4)} = d_J^{(2)}, \ f_J^{(4)} = d_J^{(0)} \text{ and } g_J^{(4)} = e_J^{(0)}; \tag{9'}$$

and

$$F_J^{(6)} = a_J^{(6)}x^9 + b_J^{(6)}x^7 + c_J^{(6)}x^6 + d_J^{(6)}x^5 + e_J^{(6)}x^4 + f_J^{(6)}x^3 + g_J^{(6)}x^2 + \\ + h_J^{(6)}x + i_J^{(6)}, \tag{10}$$

with $a_J^{(6)} = -2^{-4}b_J^{(0)}$, $b_J^{(6)} = 2^{-2}b_J^{(4)}$, $c_J^{(6)} = -2^{-4}C_6$, $d_J^{(6)} = b_J^{(4)}$, $e_J^{(6)} = c_J^{(4)}$,

$$f_J^{(6)} = c_J^{(2)}, g_J^{(6)} = d_J^{(2)}, h_J^{(6)} = d_J^{(0)} \text{ and } i_J^{(6)} = e_J^{(0)}. \tag{10'}$$

3. 2. The Catastrophe Potentials(CPs) Corresponding to the K—Jets $F_J^{(k)}((k) = 2n(n = 0; 1, 3))$

To put into evidence the *catastrophe potentials* (CPs) (or the unfoldings of the catastrophe), the k-jets of the order 0(7) and 2 (8) need a change of the variable, while the k-jets of the order 4 (9) and 6 (10) lead directly to the CPs searched for the fitting of the hypersurface (5) (or (4)) by the CSs.

3. 2. 1. The Simple Cusp CP

With the change of the variable :

$$x = z - b_J^{(0)}/4a_J^{(0)} = z - C_2/4C_1, \tag{11}$$

the k-jet of the order 0 (7) leads to the *simple cusp CP* :

$$V_{sc} = a_{sc}z^4 + b_{sc}z^2 + c_{sc}z + d_{sc}, \tag{12}$$

with the control parameters a_{sc}, b_{sc}, c_{sc} fand d_{sc} easily to be identified if we substitute (11) in (7) and identify.

3. 2. 2. The Swallowtail CP

By the change of the variable :

$$x = z - b_J^{(2)}/5a_J^{(2)} = z + (2/5)C_1/C_2 \tag{13}$$

in (8), the k-jet of the order 2 (8) takes into evidence the *swallowtail CP* :

$$V_s = a_s z^5 + b_s z^3 + c_s z^2 + d_s z + c_s, \tag{14}$$

having the control parameters a_s, b_s, c_s, d_s and e_s easily to be identified by (13) in (8).

3. 2. 3. The Wigwam CP

For k-jet of the order 4, (9) represents just the *wigwam* CP[6a] :

$$V_w = a_w x^7 + b_w x^5 + c_w x^4 + d_w x^3 + c_w x^2 + f_w x + g_w, \tag{15}$$

with the control parameters identical to those of (9), not being necessary the change of the variable.

3. 2. 4. The Fold ⊗ Butterfly Product CP

By (10), we have, directly, the *fold ⊗ butterfly* product CP(or *simple cusp ⊗ swallowtail*)[6b]:

$$V_{fb} = a_{fb}x^9 + b_{fb}x^7 + c_{fb}x^6 + d_{fb}x^5 + e_{fb}x^4 + f_{fb}x^3 + g_{fb}x^2 + h_{fb}x + i_{fb}, \quad (16)$$

with the control parameters identical to those of (10).

3. 2. 5. Conclusion

The hypersurface (5) (or (4)) — the generalization of the hypersurfaces (1_J) $(J \in \mathfrak{J})$ representing the energetic scf functionals (I) — (III) may be fitted by the CSs whose CPs are of the cuspoid type: *simple cusp*(12), *swallowtail* (14), *wigwam*(15) and *fold ⊗ butterfly* product (16), if the expansion in the Taylor series (6) cuts itself off from the term in x^8.

3. 3. The Catastrophe Manifolds Corresponding to the CPs (12), (14) — — (16)

The catastrophe manifolds (with the help of which the extremum points will be identified) corresponding to the CPs identified in *3. 2.* are obtained, in turn, by

$$V_i^u(u) = \partial V_i(u)/\partial u = 0 \ (u = z \text{ or } x), \quad (17)$$

$$V_{sc}^z(z) = 4a_{sc}z^3 + 2b_{sc}z + c_{sc} = 0 \text{ (simple cusp)}, \quad (18)$$

$$V_s^x(z) = 5a_sz^4 + 3b_sz^2 + 2c_sz + d_s = 0 \text{ (swallowtail)}, \quad (19)$$

$$V_w^x(x) = 7a_wx^6 + 5b_wx^4 + 4c_wx^3 + 3d_wx^2 + 2e_wx + f_w = 0 \text{ (wigwam)}, \quad (20)$$

and

$$V_{fb}^x(x) = 9a_{fb}x^8 + 7_{fb}x^6 + 6c_{fb}x^5 + 5d_{fb}x^4 + 4e_{fb}x^3 + 3f_{fb}x^2 + 2g_{fb}x + h_{fb} = 0 \text{ (fold } \otimes \text{ butterfly)}. \quad (21)$$

The nature of the extremum points of the catastrophe surfaces is detected by the sign of the Hessian:

$$V_i^{uu}(u) = \partial^2 V_i(u)/\partial u^2 \ (u = z \text{ or } x), \quad (22)$$

in the extremum points obtained by (17) — (21), and the critical points by the annulment of the Hessian (22). In the effective computations, the results of this paragraph will be used mostly for (II). For (I) and (III), (18) — (21) will be particularized in the following.

3. 4. The CSs which Fit (I) *and* (III)

According to the relation (4'), the hypersurface (5) (or (4)) is particularized to (I) and (III), if the terms of the degree 3 and 4 in x is annulled. In this case, (1_I) and (1_{III}) are reduced to the hypersurface:

$$F_{I,\,III} = ax^2 + bxy + cx + dy + e, \quad (23)$$

with a, b, c, d, e explained in [11, 13], x and y given by (3). Applying (6) in (23) we obtain the k-jets peculiar to the k-jets (7) — (10) :

$$F^{(0)}_{\mathrm{I,III}} = a^{(0)}x^2 + b^{(0)}x + c^{(0)}, \tag{24}$$

$$F^{(2)}_{\mathrm{I,III}} = a^{(2)}x^3 + b^{(2)}x^2 + c^{(2)}x + d^{(2)}, \tag{25}$$

$$F^{(4)}_{\mathrm{I,III}} = a^{(4)}x^5 + b^{(4)}x^4 + c^{(4)}x^3 + d^{(4)}x^2 + e^{(4)}x + f^{(4)} \tag{26}$$

and

$$F^{(6)}_{\mathrm{I,III}} = a^{(6)}x^6 + b^{(6)}x^5 + c^{(6)}x^4 + d^{(6)}x^3 + e^{(6)}x^2 + f^{(6)}x + g^{(6)}, \tag{27}$$

with the control parameters specified in [11] for (I), respectively, in [13] for (III). By a change of the variable of the type :

$$x = z - b^{(k)}/(k+1)a^{(k)} (k = 2, 4, 6), \tag{28}$$

(25) — (27) lead to the CSs : *fold* ($(k) = 2$), *swallowtail* ($(k) = 4$), respectively, *wigwam* ($(k) = 6$), the *fold* CP being given by [6, 11, 13] :

$$V_f = a_f z^3 + b_f z + c_f. \tag{29}$$

For $(k) = 0$, the fitting of the hypersurface (23) is done by a nonCS (24). These results are obtained directly too, from (7) — (10), taking into account the (4'). *The table 1* synthesizes the results from 3.3. and 3.4. on the CSs which fit (I) — (III) comprising the CSs too, for $(k) = 8$ and $(k) = 10$, nonincluded in the text *.

4. The Integral Quadratic Error

The degree of the fitting of the hypersurfaces (I) — (III) ((1_I) — (1_{III})) by the CSs taken into evidence in the paragraph 3, may be measured by the integral quadratic error [11 — 13] :

$$\varepsilon^{(k)}_J = \int_{-1}^{+1} |F_J - F^{(k)}_J|^2 \mathrm{d}x \, ((k) = 2n \; (n = 0; \overline{1, 3}); J \in \mathcal{J}), \tag{30}$$

if we take into account that $x \in [-1, +1)$, when $\alpha \in [-\Pi, +\Pi]$. Appealing to the relations which define F_J, respectively, $F^{(k)}_J$, (30) is transformed into :

$$\varepsilon^{(k)}_J = \varepsilon^{(k)}_{1J}[C^J_2]^2 + \varepsilon^{(k)}_{2J}[C^J_4]^2 + \varepsilon^{(k)}_{3J}C^J_2C^J_4 \; ((k) = 2n(n = 0; \overline{1, 3}); J \in \mathcal{J}) \tag{31}$$

in which C^J_2 and C^J_4 are the coefficients of the terms in y^J_j from (1_I) — (1_{III}), $\varepsilon^{(k)}_{iJ}(i = \overline{1, 3})$ being computed and tabled in [11 — 13]. It is significant that, for $J = \mathrm{I}, \mathrm{III}$, we have :

$$\varepsilon^{(k)}_{3J} = 0 \tag{32}$$

and that in the integral quadratic error (31) interfere those coefficients of the functionals (I) — (III) explained, which contain the cos α (according to the relations (1_I) — (1_{III}) and (3))). The analysis of the integral quadra-

tic error (30) by (31) made in [11 — 13] shows that $\varepsilon_f^{(k)}$ diminishes while the order (k) of the k-jets that fit the hypersurfaces $(1_I) - (1_{III})$ rises setting approximatively at $(k) = 6$. It shows that the optimum fitting is achieved for (I) and (III) by the *wigwam* CS and for (II) by the *fold* $\otimes$ $\otimes$ *butterfly* CS. The same analysis shows that satisfactory results are obtained even for the fitting by the CSs corresponding to $(k) = 2$ for (I) and (III), respectively to $(k) = 0$ for (II). The best results are obtained at (k), the highest, with a great quantity of computation and of time, but not greater than in the classic scf procedure.

Table 1

The CSs which Fit the Functionals (I) — (III) $(1_I) - (1_{III})$

k-jet	E_{scf}(I) and $(\Delta c_{ij})_{scf}$(III)	ΔE_{scf}(II)
(0)	noncatastrophe (nonCS)	simple cusp
(2)	fold	swallowtail
(4)	swallowtail	wigwam
(6)	wigwam	fold $\otimes$ butterfly
(8)*	fold $\otimes$ butterfly	fold $\otimes$ star
(10)*	fold $\otimes$ star	swallowtail $\otimes$ star

* CSs nonicluded in the text, which are obtained with (6) containing the therm in $x^8((k) = 8)$, respectively, in x^8 and in $x^{10}((k) = 10)$.

5. Discussion

A debating of the nonclassic results which are obtained for (I) — — (III) $((1_I) - (1_{III}))$, by the application of the CT, with classic results existing in the literature, may be realized with a less quantity of computation and of time, in the case $(k) = 2$ for (I) and (III) [11, 13], respectively, $(k) = 0$ for (II) [12]. For $(k) = 2$, according to the table 1, the hypersurface E_{scf}(I) $((1_I))$ may be fitted by the *fold* CS (29). If (17) is applied to (29) and the obtained equation is solved in the case of the quantum system He, two values α [11a] appear which minimize (29), according to the number of the scf solutions obtained classicaly in [4]. Additionally, the minimum values $E_{scf}^{(2)}$ computed by the CT are in accordance with the classic values obtained in [4].

With $(k) = 0$, according to the table 1, the hypersurface ΔE_{scf} (II) $((1_I))$ may be fitted by the *simple cusp* CS (12). By the *simple cusp* catastrophe manifold (18), taking into account the definitions of the control parameters and solving (18), values α_{min} are obtained with which may be obtained the nonclassic values $\Delta E_{scf}^{(0)} \leqslant \varepsilon$ [12], with ε as order of size in accordance with that classicaly obtained (or pre-established) for the atomic and molecular closed-shell systems[5, 8]. We can thus approach

nonclassically the mc-scf convergence, by the possibility of the establishment of the convergence criteria.

The fitting of the hypersurface $(\Delta e_{ij})_{scf}$ (III) ((1_1), for $(k) = 2$, by the *fold* CS, refinds [13] the algebraic conditions [7a] of the approximation of the hermiticity of the scf Lagrange multipliers, as a peculiar case of the topological conditions [13] of the aproximation of the hermiticity. It also allows the nonclassic finding of a $[(\Delta e_{ij})_{scf}]_{min} \sim 10^{-4}\ u$, for the quantum systems methylene and ethylene, in accordance with the order of the size from [7]. The quantitatively better results may be obtained fitting (I) — —(III) by CSs corresponding to (k) higher and higher, with the disadvantage of the increase of the quantity of the necessary computation and time.

REFERENCES

1. *C. C. J. Roothaan.* Rev. Mod. Phys., *23*, 69(1951); *32*, 179(1960).
2. *Ch. E. Reid, Y. Öhrn*, Rev. Mod. Phys., *35*, 445 (1963).
3. *M. Rossi*, J. Chem. Phys., *43*, 3918 (1965); *46*, 989 (1967).
4. *R. E. Stanton*, J. Chem. Phys., *48*, 257 (1968).
5. *T. C. Chang, F. Grein*, J. Chem. Phys., *57*, 5270(1972).
6. (a) *R. Thom*, *„Stabilité structurelle et morphogénèse"*, Benjamin, New York, 1972;
   (b) *A. E. R. Woodcock, T. Poston*, *„A Geometrical Study of the Elementary Catastrophes"*, Springer, Berlin, 1974;
   (c) *T. Poston, I. Stewart*, *„Catastrophe Theory and Its Applications"*, Pitman, London, 1978.
7. (a) *J. Hinze*, J. Chem. Phys., *59*, 6424 (1973); (b) *J. Hinze, E. Yurtsever*, J. Chem. Phys., *70*, 3188(1979).
8. *A. Golebiewski, E. Nowak—Brocklawik*, Molec. Phys., *26*, 989 (1973); *28*, 1283 (1974).
9. *J. —M. Normand*, *„A Lie Group Rotations in Quantum Mechanics"*, North-Holland, Amsterdam, 1980, chap. 2.
10. Ref. /16/ from /13/.
11. *V. Scridonesi—Călin, M. Vasiu, I. M. Popescu*, Buletinul IPB, *46—47*, 15 (1984 — 1985) (a); *V. Scridonesi—Călin*, St. Cerc. Fiz. *38*, 601 (1986) (b).
12. *V. Scridonesi—Călin*, St Cerc. Fiz., *38*, 117 (1986).
13. *V. Scridonesi—Călin, M. Vasiu, Maria Cristea*, Buletinul IPB, *48*, 3 (1986).

Funcţionale SCF energetice fitate prin structuri catastrofă

Funcţionalele scf (de cîmp selfconsistent) energetice: energia scf (I), incrementul rotaţional al energiei scf (II) şi „gradientul" rotational al multiplicatorilor Lagrange scf (III) sînt fitate prin structuri catastrofă (CS). Deşi (I) —(II), în teoria scf, pun probleme calitativ distincte, prin *Teoria catastrofelor*, se reduc la *o problemă generală unică*, cu etapele: (a) găsirea formei polinomiale (I)—(III) posibil de aproximat prin potenţiale catastrofă (CP); (b) identificarea parametrului de comportare (stare) pentru (a); (c) inducerea *k*-jeturilor şi a CP corespunzătoare; (d) cercetarea punctelor de extremum (minim) şi critice ale CS ce fitează hipersuprafeţele (I)—(III); (e) calculul şi analiza erorii pătratice integrale ca măsură a gradului de fitare a (I)—(III) prin CS; şi (f) interpretarea rezultatelor generale (a)—(e) prin specificitatea problemelor scf puse de (I)—(III).

C. Z:

UZURA CAPETELOR DE IMPRIMARE MATRICIALE

T. DEMIAN, C. NIȚU *

Factorul principal care determină durata de viață a capetelor de imprimare matriciale este uzura acelor. Cercetări realizate experimental au pus în evidență cîteva modalități de ieșire din uz a acelor investigîndu-se mecanismul uzurii lor și comportarea diferitelor materiale. Sînt luate în considerare interacțiunile abrazive dintre ac și ghidaje, ac și panglică impregnată precum și tensiunile datorate impactului. Pe aceste baze au fost studiate influențele formei și poziției ghidajelor, și curburii acelor asupra tensiunilor la contactul dintre ace și ghidaje și asupra frecării. În consecință, bazate pe criteriul frecării și uzurii minime sînt date indicații cu privire la poziția optimă a reazemelor la acele curbe.

1. Introducere

Elementele critice, în ceea ce privește uzura, ale unui cap de imprimare matricială sînt acele. Zonele afectate sînt cele de contact cu ghidajele și, în special, cu cel frontal. Teoretic, capetele balistice sînt afectate mai puțin de frecarea din ghidaje, decît cele cu plonjor, deoarece reacțiunile din reazeme sînt mai mici. Apar deci, ca foarte importante dispunerea reazemelor la capetele balistice, poziția de fixare a acului în plonjor la cele cu mod de funcționare „apăsat" sau poziția de montaj a pinului de imprimare la cele cu înmagazinare magnetoelastică a energiei.

Cu puține excepții, pe plan mondial se utilizează aceleași materiale; pentru ace, oțel de arc, wolfram și aliaje de wolfram, iar pentru ghidajul frontal rubinul ori safirul sintetic. Se mai utilizează materiale ceramice, plastice compozite sau uzuale, cum ar fi delrin AF.

Selecția cuplului de materiale este o problemă legată de costul și destinația echipamentului, care impun durata de viață a capului de imprimare. Deși aceasta este exprimată în milioane de caractere tipărite și variază de la 10 pînă la 500, ori mai mult, este rațional, într-o analiză a durabilității acelor să se studieze comportarea individuală a acelor, prin numărul de puncte imprimate. Oricum, testele experimentale indică aspecte cantitative particulare în funcție și de frecvența de lucru, de hîrtia și panglica împregnată folosită.

---

* Prof. dr. docent; Asist. dr. ing., Catedra Mecanică fină

2. Studiul experimental al uzurii și frecării acelor

Dispozitivul experimental utilizat este constituit dintr-un cap de imprimare balistic cu ghidajul frontal din rubin sintetic, la care au fost montate cîte 3 ace din oțel de arc, wolfram și aliaj de wolfram cu reniu. Dispozitivul a permis reglarea distanței dintre ac — hîrtie și panglică impregnată, precum și măsurarea forței dezvoltată la impactul acului pe hîrtie.

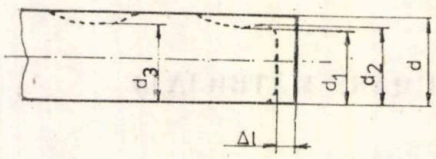


Fig. 1 — Dimensiuni ale unui ac uzat

Măsurătorile vizînd determinarea uzurii acelor, efectuate sub microscop, au urmărit diametrele la nivelul ghidajelor și lungimea acelor, punîndu-se în evidență o extremitate a acului uzat, ca în fig. 1. Au fost studiate influențele unor parametri ca materialul acelor, materialul ghidajelor frecvența de imprimare, tipul hîrtiei și al panglicii impregnate.

În ceea ce privește materialul acelor, evoluția scurtării lor. Δl, variază cu natura și duritatea, așa cum se prezintă în fig. 2, ceea ce indică superioritatea wolframului și a aliajelor sale, atît în privința uzurii cît și a dinamicii procesului de imprimare. Studiul influenței hîrtiei și panglicii impregnate a fost efectuat pe un cap cu ace din wolfram punîndu-se în evidență acțiunile abrazive ale acestora (fig. 3). Diagramele din fig. 2 și 3 au fost obținute prin regresie liniară.

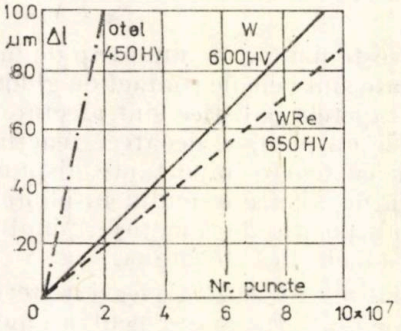


Fig. 2 — Uzura acelor pentru diferite materiale

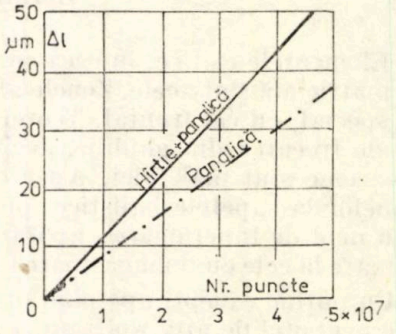


Fig. 3 — Influența hîrtiei și panglicii impregnate asupra uzurii acelor

Au fost semnalate variații mici ale diametrelor acelor la nivelul ghidajelor intermediare și puțin mai mari în ghidajul frontal, fără a fi comparabile cu scurtarea. Totuși, uzura diametrului extremității acului trebuie limitată sever, deoarece provoacă dezalinierea acelor, deci defecte în scrierea caracterului.

Frecarea dintre ace și ghidajele lor afectează și buna funcționare dinamică a capului matricial. În [1] și [2] au fost studiate comportarea dinamică a capetelor matriciale și influența frecării asupra ei. Modelul teoretic ține seama de o forță de frecare redusă la axa acului a cărei valoare trebuie determinată experimental. În acest scop a fost construit un dispozitiv special utilizîndu-se la măsurare reacțiunea creată în ghidaj de deplasarea acului. Valorile măsurate sînt centralizate în tabelul 1.

Tabelul 1

Valori ale forței de frecare dintre ace și ghidaje la un cap balistic

Acul nr.		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Forța de frecare, cN	Ghidaje rodate	0,9	1,2	0,4	0,7	0,6	0,8	0,3	0,5	0,6
	Ghidaje noi	1,1	1,4	0,7	0,7	0,6	1,1	0,4	0,8	0,7

3. Interpretarea teoretică a uzurii. Măsuri constructive pentru reducerea frecării

Dacă scurtarea acelor datorită acțiunii abrazive a hîrtiei și panglicii impregnate are o explicație intuitivă, rotunjirea muchiei dintre suprafața frontală și cea laterală este rezultatul unei distribuții de presiuni ce poate fi calculată. Considerîndu-se ciocnirea dintre un cilindru cu suprafața frontală plată (acul) și un corp vîscoelastic liniar (hîrtia și panglica) sistemul de ecuații constitutive este :

$$(2\mu + \lambda)\,\text{grad div}\,\bar{u} - \mu\,\text{rot rot}\,\bar{u} = \rho\ddot{\bar{u}} \tag{1}$$

$$\mu = \mu_0 \{E_1 + E_0 \exp\,[-(E_0 + E_1)\,\eta_1^{-1}\,t]\}\,(E_0 + E_1)^{-1} \tag{2}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{3}$$

unde $\bar{u}$ este vectorul deplasare ; λ, μ — constantele lui Lammé ; ρ — densitatea corpului ; E_0, E_1, η_1 — parametrii caracteristici modelului vîscoelastic liniar al solidului ; ν — coeficientul Poisson.

În [3] s-a indicat o metodă de rezolvare a sistemului de ecuații (1) —(3), utilizîndu-se funcția Galerkin, în cazul stării plane de deformații. Aplicîndu-se această metodă la ciocnirea acului cu hîrtia și panglica impregnată, problema admite simplificări datorită simetriei axiale a sistemului, presiunea de contact calculată, p, depinzînd numai de coordonata pe direcție radială, r.

Din curbele de comprimare a hîrtiei și panglicii, ridicate experimental, a fost posibilă evaluarea parametrilor care o modelează ca un solid vîscoelastic liniar :
$E_0 = 39.10^6\ \text{Nm}^{-2}$; $E_1 = 313.10^6\ \text{Nm}^{-2}$; $\eta_1 = 62{,}6.10^3\ \text{Nsm}^{-2}$. Adoptîndu-se indicele 0 pentru valorile mărimilor caracteristice la momentul inițial și valoarea $\nu = 0{,}25$, s-au determinat $\mu_0 = 1{,}54.10^6\ \text{Nm}^{-2}$ și $c_0 = \sqrt{\mu_0/\rho} = 57{,}6\ \text{ms}^{-1}$, viteza de propagare a undelor de deformație.

Dacă m este masa acului, b — viteza lui de impact, d — diametrul său, presiunea de contact inițială, considerată uniformă este $p_0 = v\rho\,[(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho]^{1/2} = 102.10^3\ \mathrm{Nm^{-2}}$.

Calculul a fost efectuat pentru diferite momente ale contactului definite prin parametrul adimensional $T = 2\,c_0\,t/d$, punîndu-se în evidență presiunea $P = p/p_0$. Acul confecționat din wolfram este caracterizat prin parametrul masic adimensional $M = \rho d^2/m = 0{,}017$. În fig. 4 este

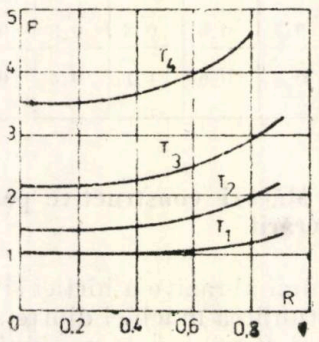


Fig. 4 — Presiunea de contact în funcție de coordonata radială

reprezentată evoluția parametrului P în funcție de coordonata radială adimensională $R = 2r/d$, la momentele $T_1 = 3{,}3$; $T_2 = 6{,}6$; $T_3 = 8{,}25$; $T_4 = 9{,}9$. Acesta evidențiază valori foarte mari ale presiunii de contact în apropierea muchiei dintre suprafața frontală și cea laterală a acului, explicînd calitativ și, cu aproximație, cantitativ, uzura pronunțată care apare în această zonă.

Uzura transversală a acelor este consecința existenței unor reacțiuni cu valori mari în reazeme, ce conduc implicit la tensiuni de contact mari, respectiv la forțe de frecare mari.

Simpla configurare geometrică a reazemelor poate conduce la diminuarea forțelor de frecare, respectiv a reacțiunilor și tensiunilor de contact. Se consideră un ac curb, ca în fig. 5, cu două reazeme intermediare și se notează :

$$L_1/L = p\,;\ L_2/L = q\,;\ F_{12}\,L^3/(EI) = \bar{F}_{1.2}\,;\ V_{0.3}\,L^3/(EI) = {}_{0.3},\,\bar{V}$$

unde $L_{1.2}$, L, $F_{1.2}$, $V_{0.3}$ au semnificațiile din figură, iar E, I sînt modulul de elasticitate, respectiv momentul de inerție ale acului.

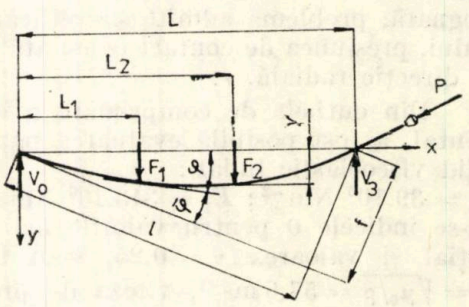


Fig. 5 — Deformația acului

Pe baza ecuațiilor deformațiilor liniare și unghiulare, punîndu-se condițiile ca $y(L) = 0$ și ca direcțiile acelor în ghidajul 1, să fie apropiate de cele din ghidajul frontal ($\overline{\varphi} \leqslant 2°$), rezultă relațiile :

$$\bar{F}_1 = \frac{\frac{2\overline{\varphi}}{p^2} q(2-q) - \frac{6f}{l}}{(1-p)(q-p)(2-p-q)}; \quad (4) \qquad \bar{F}_2 = \frac{\frac{6f}{l} - \frac{2\overline{\varphi}}{p}(2-p)}{(1-q)(q-p)(2-p-q)}; \quad (5)$$

$$\bar{V}_0 = \frac{2\overline{\varphi}}{p^2}; \quad (6) \qquad \bar{V}_3 = \frac{\frac{6f}{l} - \frac{2\overline{\varphi}q}{p}(3-p-q)}{(1-p)(1-q)(2-p-q)} \quad (7)$$

Se observă că din punct de vedere al ghidajului frontal o poziționare relativ distanțată față de acesta, a reazemului 1 micșorează reacțiunea, deci și tensiunea de contact. În momentul impactului, forța P, în lungul acului contribuie la încărcarea suplimentară a ghidajului frontal cu valori cu mult mai mari decît cele dezvoltate în mișcarea acului, de forma curbă a acestuia. Rezultă că poziția reazemelor intermediare optimizează numai valorile forței de frecare dintre ace și ghidaje. Definindu-se funcția forței de frecare relativă :

$$\bar{F}(p,q) = \mu_1 \bar{V}_0 \sqrt{1 + \left(\frac{f}{l}\right)^2} + \mu_2 |\bar{F}_1| \sqrt{1 + \left(\frac{f}{l} - \overline{\varphi}\right)^2} +$$

$$+ \mu_2 |\bar{F}_2| \sqrt{1 - \left[\frac{f}{l} - \frac{\bar{V}_0 q^2}{2} + \frac{\bar{F}_1 (q-p)^2}{2}\right]^2} +$$

$$+ \mu_2 |\bar{V}_3| \sqrt{1 + \left[\frac{f}{l} - \frac{\bar{V}_0}{2} + \frac{\bar{F}_1 (1-p)^2}{2} + \frac{\bar{F}_2 (1-q)^2}{2}\right]^2} \quad (8)$$

unde $\mu_{1,2}$ sînt coeficienții de frecare dintre ace și ghidajul frontal, respectiv cele intermediare, a fost calculat minimul acestei funcții, pentru ace cu $f/l = 0{,}1$, rezultînd valorile optime $p \approx 0{,}4$ și $q \approx 0{,}7$.

4. Concluzii

Dintre fenomenele care determină durata de viață a unui cap de imprimare matricial, uzura acelor este cel mai important. Printr-un studiu experimental au fost puse în evidență modificarea formei geometrice în funcție de numărul de puncte imprimate. Fiind de tip balistic, modificarea dimensiunilor transversale ale acelor este nesemnificativă. A fost dovedită superioritatea wolframului și a aliajelor sale.

Efectul de rotunjire a capetelor acelor, observat experimental, a fost explicat și din punct de vedere al calculului, luîndu-se în considerare efectul impactului cu hîrtia, punîndu-se în evidență presiuni mult mai mari pe frontiera suprafeței de contact, decît în centrul ei.

Configurația geometrică a acelor curbe și poziția reazemelor lor, pe lîngă cuplul de materiale utilizat, influențează frecarea și uzura. Stabilindu-se o funcție a forței de frecare a acelor în ghidaje, a fost determinată poziția acestora care minimizează această funcție.

BIBLIOGRAFIE

1. *T, Demian C. Nițu,* „On the Dynamic Behaviour of the Matrix Printheads and Its Designing Implications", The 7th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, 1577—1580, Sevilla, sept. 1987
2. *T. Demian, C. Nițu,* „Influența frecării dintre ace și ghidaje asupra funcționării capetelor de imprimare matriciale balistice", Studii și cercetări de mecanică aplicată, (1988)
3. *K. Kawatate,* „Transition of collision contact force between a viscoelastic half-space and a flat-headed rigid body", Mechanics of the contact between deformable bodies, 221—238, Delft University Press.

Wear in Matrix Printheads

The most important factor which affects the lifetime of the matrix printheads is the wire wear. Experimentally performed investigations pointed out some ways of wire getting out of operation and the different material behaviour. The abrasive interaction between wire and guides, wire and paper and ribbon and, also, impact stresses were taken into consideration. The influence of the guide shape and position the influence of the wire are studied. Consequently, based on the minimum friction and wear, some indications about the optimum position of the wire guides are given.

C.Z: 666.31

CARACTERIZAREA REOLOGICĂ A UNOR PASTE CERAMICE INDIGENE

GH. IORDACHE, GH. ENE, T. SIMA *

Studierea caracteristicilor reologice pentru aceste tipuri de materiale este într-o fază de început. În lucrare se obțin curbe pentru variația tensiunii de forfecare funcție de umiditate (pentru 38% și 40% apă).

Sînt analizate două sorturi de argilă (Jugănaru și Defcea) și un sort de caolin (Arghirești). Curbele obținute conduc la o serie de concluzii interesante.

Studierea sub aspect reologic a pastelor ceramice se impune tot mai mult, pe măsura dezvoltării mașinilor pentru prelucrarea acestor materiale și în special a mașinilor de extrudere (presele cu melc).

În momentul de față se impune căutarea unui model matematic adecvat pentru procesul extrudării materialului, astfel ca proiectantul să aibă la dispoziție un instrument de lucru cît mai precis. Aceasta se impune cu atit mai mult cu cît în momentul de față proiectarea unor astfel de mașini se face prin similitudine cu o mașină existentă, metodă care după cum se știe este destul de aproximativă, în general.

În lucrarea de față ne-am propus să obținem reogramele (curbele tensiunii de forfecare în funcție de reopantă) unor paste ceramice indigene. Au fost alese două tipuri de argile pentru construcții (argila de Jugănaru și de Defcea) și un sort de caolin (de Arghirești), ale căror caracteristici fizice sînt indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

Materialul	Gr. spec. intrinsecă ρ, Kg/m³	Gr. spec. în grămadă ρ_g Kg/m³	Supraf. specifică s_{sp}, cm²/g	Diametrul mediu² d_m, cm	Rezidiul pe sită de 4900 och/cm² R 009
Argilă Jugănaru	1.734	720	4.542	$7,62 \times 10^{-4}$	50
Argilă Defcea	1.818	620	2.692	$1,225 \times 10^{-3}$	32
Caolin Arghirești	1.680	620	2.305	$1,549 \times 10^{-3}$	52

1) Determinată cu permeabilimetrul Blaine
2) Calculat cu relația $d_m = 6/(\rho \cdot S_{sp})$

* Conf. dr. ing.; Șef lucrări dr. ing.; Asist. ing., catedra Utilaj tehnologic

Pentru determinarea tensiunilor de forfecare funcție de reopantă s-a folosit un plastometru cu capilară (fig. 1).

Aparatul se compune (fig. 1, a) din corpul de termostatare (1), în care se introduce cilindrul cu capilară (2). Cilindrul cu capilară (fig. 1, b) este compus din cilindrul de presiune (1), capilara (2), piuliță de susținere a capilarei (3), piuliţa de sprijin a cilindrului (4), pistonul (5) și greutăţile (6) cu care se reglează presiunea pastei ceramice.

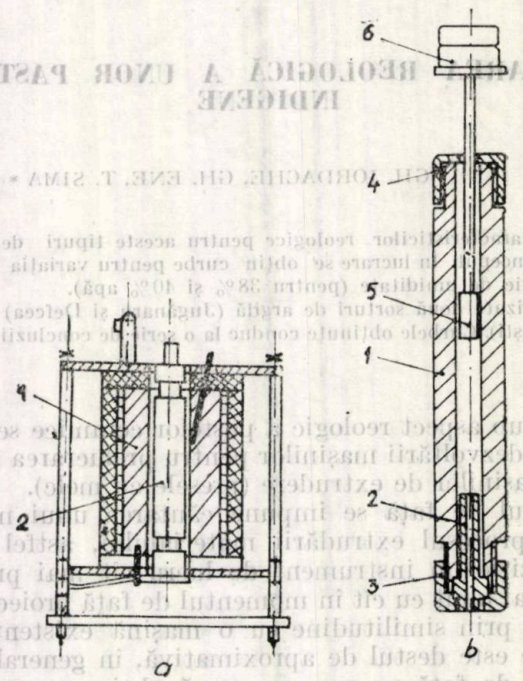


Fig. 1 — Plastometru cu piston (a); cilindru cu capilară (b)

Capilarele utilizate au caracteristicile geometrice indicate în tabelul 2.

Tabelul 2

Nr. crt.	Diametrul, D mm	Lungimea, L mm	Raportul L/D
1	1,647	12,849	7,800
2	2,576	26,00	10,090
3	1,631	27,679	16,970
4	2,601	50,100	19,268

Cu ajutorul plastometrului s-a determinat debitul de material scurs prin capilară pentru o anumită valoare a căderii de presiune. Căderea de presiune a putut fi variată în limitele $1{,}058 \times 10^5 \ldots 11{,}10 \times 10^5$ N/m², aceste valori fiind întîlnite în practică, la mașinile de extrudere cu melc.

Umiditatea materialului a fost aleasă astfel încît să se obțină valori reproductibile ale tensiunii de forfecare pentru toate cele trei materiale. Cu alte cuvinte s-a ales umiditatea astfel încît materialul să curgă prin capilarele alese cu o viteză care să permită determinarea valorii debitului cu o precizie ridicată. Valoarea stabilită pentru umiditate a fost de 36%. Pentru comparație s-au mai făcut determinări și la 40% umiditate, pentru argila de Jugănaru și pentru caolinul de Arghirești. Folosind relațiile cunoscute [1—4] pentru curgerea prin capilară,

$$\tau = \frac{\Delta p \cdot R}{2L}; \qquad \mathcal{R} = \frac{4Q}{\pi R^3}, \tag{2}$$

s-a obținut o serie însemnată de valori care au fost transpuse în două diagrame, în funcție de umiditatea materialului (fig. 2 și 3).

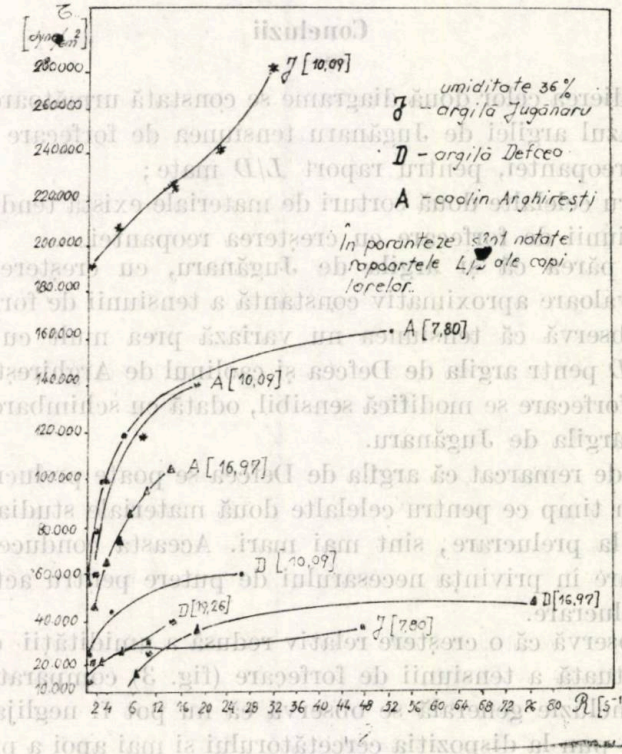


Fig. 2 — Variația tensiunii de forfecare funcție de reopantă, pentru umiditatea de 36%

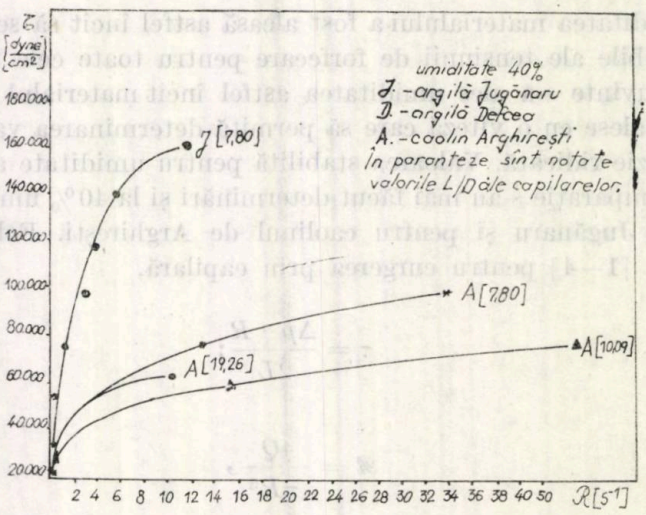


Fig. 3 — Variația tensiunii de forfecare funcție de reopantă, pentru umiditatea de 40%

Concluzii

Din studierea celor două diagrame se constată următoarele :

1. În cazul argilei de Jugănaru tensiunea de forfecare crește rapid cu creșterea reopantei, pentru raport L/D mate ;

2. Pentru celelalte două sorturi de materiale există tendința de liniarizare a tensiunii de forfecare cu creșterea reopantei.

3. S-ar părea că și argila de Jugănaru, cu creșterea umidității tinde spre o valoare aproximativ constantă a tensiunii de forfecare.

4. Se observă că tensiunea nu variază prea mult cu schimbarea raportului L/D pentr argila de Defcea și caolinul de Arghirești. În schimb tensiunea de forfecare se modifică sensibil, odată cu schimbarea raportului L/D, pentru argila de Jugănaru.

5. Este de remarcat că argila de Defcea se poate prelucra latens iuni mai reduse, în timp ce pentru celelalte două materiale studiate tensiunile de forfecare, la prelucrare, sînt mai mari. Aceasta conduce la concluzii corespunzătoare în privința necesarului de putere pentru acționarea mașinilor de prelucrare.

6. Se observă că o creștere relativ redusă a umidității conduce la o scădere accentuată a tensiunii de forfecare (fig. 3) comparată cu fig. 2.

Ca o concluzie generală se observă că nu pot fi neglijate aspectele reologice, care pun la dispoziția cercetătorului și mai apoi a proiectantului o serie întreagă de informații deosebit de utile.

Listă de notații

d_m — diametrul mediu al particulei;
ρ — greutatea specifică intrinsecă;
S_{sp} — suprafața specifică;
τ — tensiunea de forfecare;
Δp — diferența de presiune;
R — raza capilarei;
L — lungimea capilarei;
$\mathfrak{R}$ — reopanta (gradientul de viteză);
Q — debitul scurs prin capilară

BIBLIOGRAFIA

1. *J. R. Van Wazer, J. W. Lyons, K. I. Kim, R. E. Colwell*, Viscosity and Flow Measurement, New York — London, 1963.
2. *S. P. Niciporenko*, Osnovi vaprosi teorii protessov obrabotki i formovaniia keramiceskih mass, Izd. Akademii, Nauk Ucranskii, Kiev, 1960.
3. *B. D. Coleman, H. Marcovitz, W. Noll*, Viscosimetric Flows of Non- Newtonian Fluids Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1966
4. *J. Meissner*, Kunststoffe, 57, nr. 5, 1967.

The Rheological Behaviour of Some Native Ceramic Pastes

The study of rheological characteristics for such materials is in the beginning stage.

In this study there are obtained the cures for shear Stress variations function of humidity (for 38% and 40% water).

Two ranges of clay (Jugănaru and Defcea) and one of kaolin (Arghirești) are analysed. The analyse of curve gives interesting conclusions.

C.Z. : 621.8.02

O MODELARE A ECUAȚIILOR ÎN DINAMICA SISTEMELOR PLANE

ȘT. STAICU*

Lucrarea determină, sub forma matriceală, ecuațiile diferențiale pentru mișcarea plan-paralelă a unui sistem de solide, rezemat fără frecare pe mai multe curbe plane, prin metoda grafului echivalent. Aplicînd principiul deplasărilor virtuale se stabilesc relații de echilibru dinamic care conduc la determinarea legilor de mișcare.

1. Introducere

În cele ce urmează se stabilesc, sub forma matriceală, ecuațiile diferențiale ale mișcării unui sistem plan de rigide supus la legături perfecte, utilizînd metoda grafului echivalent.

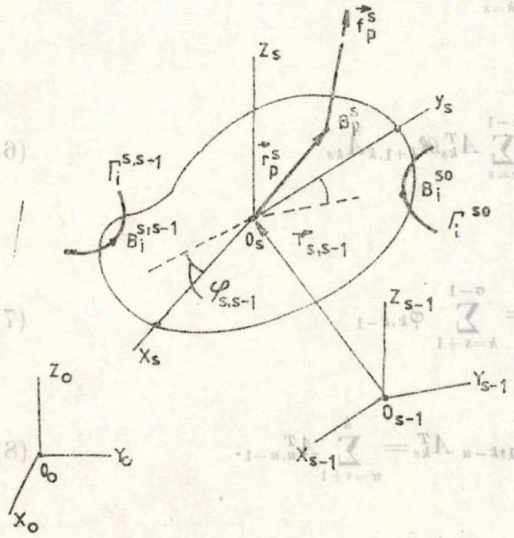


Fig. 1

Să considerăm un reper fix $O_0\, x_0 y_0 z_0 (T_0)$ față de care se deplasează, sub acțiunea forțelor exterioare $\overline{f}_p^s$, sistemul de corpuri $T_s (s = 1, 2, \ldots, n)$ solidare cu triedrele $O_s x_s y_s z_s$ (fig. 1). Sistemele de referință au originile O_s în planul director al mișcărilor, care coincide cu planul fix $O_0 x_0 y_0$.

Poziția rigidului T_s în raport cu reperul mobil T_{s-1} este precizată de coordonatele relative $x_{s,s-1}$, $y_{s,s-1}$ ale originii O_s și de unghiul relativ de rotație $\varphi_{s,s-1}$ dintre $O_s x_s$ și

* Șef lucrări dr. ing., catedra Mecanică

$O_{s-1}x_{s-1}$. Acești parametri formează matricele coloane

$$\vec{R}_{s,s-1}=\begin{bmatrix}\vec{r}_{s,s-1}\\ \vec{0}\end{bmatrix},\quad \vec{\Lambda}_{s,s-1}=\begin{bmatrix}\vec{0}\\ \vec{\lambda}_{s,s-1}\end{bmatrix}, \tag{1}$$

unde

$$\vec{r}_{s,s-1}=\begin{bmatrix}x_{s,s-1}\\ y_{s,s-1}\\ 0\end{bmatrix},\quad \vec{\lambda}_{s,s-1}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \varphi_{s,s-1}\end{bmatrix}\ (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

Matricea ortogonală $A_{s,s-1}$ de trecere din reperul T_{s-1} în sistemul alăturat T_s este

$$A_{s,s-1}=\left[\begin{array}{c|c}a_{s,s-1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & a_{s,s-1}\end{array}\right] \tag{3}$$

unde

$$a_{s,s-1}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_{s,s-1} & \sin\varphi_{s,s-1} & 0\\ -\sin\varphi_{s,s-1} & \cos\varphi_{s,s,-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{4}$$

Poziția relativă a unui solid T_σ față de $O_sx_sy_sz_s$, este fixată de vectorul de poziție $\vec{R}_{\sigma s}$ al originii O_σ

$$\vec{R}_{\sigma s}=\sum_{k=s}^{\sigma-1}A_{ks}^T\vec{R}_{k+1,k} \tag{5}$$

sau de forma sa echivalentă

$$\mathscr{R}_{\sigma s}=\sum_{k=s}^{\sigma-1}A_{ks}^T\mathscr{R}_{k+1,k}A_{ks} \tag{6}$$

și unghiul de rotație

$$\varphi_{\sigma s}=\sum_{k=s+1}^{\sigma-1}\varphi_{k,k-1} \tag{7}$$

unde

$$A_{ks}=\prod_{u=1}^{k-s}A_{k-u+1,k-u}\ A_{ks}^T=\sum_{u=s+1}^{k}A_{u,u-1}^T. \tag{8}$$

Operatorul

$$\mathscr{R}_{k+1,k}=\left[\begin{array}{c|c}0 & 0\\ \hline \tilde{r}_{k+1,k} & 0\end{array}\right] \tag{9}$$

conține matricea antisimetrică

$$\tilde{r}_{k+1,k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_{k+1,k} \\ 0 & 0 & -x_{k+1,k} \\ -y_{k+1,k} & x_{k+1,k} & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Viteza relativă a solidului T_σ în punctul său O_σ, în raport cu referențialul T_{s-1}, este exprimată de vectorul dual

$$\vec{V}_{\sigma,s-1} = \begin{bmatrix} \vec{v}_{\sigma,s-1} \\ \hline \vec{\omega}_{\sigma,s-1} \end{bmatrix} \tag{11}$$

unde $\vec{v}_{\sigma,s-1}$ este viteza originii O_σ, iar $\tilde{\omega}_{\sigma,s-1}$ este viteza unghiulară în jurul punctului O_σ.

Matricea coloană $\vec{V}_{\sigma,s-1}$ este exprimată în funcție de vitezele relative $\vec{V}_{k,k-1}$ ale rigidelor T_k prin relația fundamentală [1]:

$$\vec{V}_{\sigma,s-1} = \sum_{k=s}^{\sigma-1} A_{\sigma k} \left\{ \vec{V}_{k,k-1} + \Omega_{k,k-1} \sum_{q=k}^{\sigma-1} A_{qk}^T \vec{R}_{r+1,q} \right\} + \vec{V}_{\sigma,\sigma-1}, \tag{12}$$

unde matricele

$$\Omega_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{k,k-1} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{\omega}_{k,k-1} \end{bmatrix}, \quad \vec{\Omega}_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \hline \vec{\omega}_{k,k-1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

conțin matricea antisimetrică a mișcării relative

$$\tilde{\omega}_{k,k-1} = \omega_{k,k-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

În continuare, se face ipoteza că un rigid oarecare T_σ alunecă în punctele $B_i^{\sigma 0}$ pe curbele fixe plane $(\Gamma_i^{\sigma 0})$ și în punctele $B_i^{\sigma,\sigma-1}$ pe curbele $(\Gamma_i^{\sigma,\sigma-1})$care aparțin rigidului $T_{\sigma-1}$ solidar cu triedrul $O_{\sigma-1}\, x_{\sigma-1}\, y_{\sigma-1}\, z_{\sigma-1}$.

Să notăm cu

$$h_i^{\sigma 0}(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l_{\sigma 0};\ l_{\sigma 0} < 3) \tag{15}$$

$$h_i^{\sigma,\sigma-1}(x_{\sigma-1},\ y_{\sigma-1}, z_{\sigma-1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l_{\sigma,\sigma-1};\quad l_{\sigma,\sigma-1} < 3),$$

ecuațiile curbelor $(\Gamma_i^{\sigma 0})$, respectiv, $(\Gamma_i^{\sigma,\sigma-1})$.

Se mai presupune că sistemul de corpuri are forma unui lanț cinematic simplu închis, în care ultimul element T_n este legat de primul element component T_1.

Studiul mișcării sistemului poate fi simplificat dacă se construiește graful echivalent, reprezentînd corpurile prin puncte materiale, iar legăturile prin segmente care unesc punctele respective (fig. 2).

Cu ajutorul grafului se stabilește mobilitatea relativă a subsistemului format din corpurile T_s, T_{s+1}, ..., T_n:

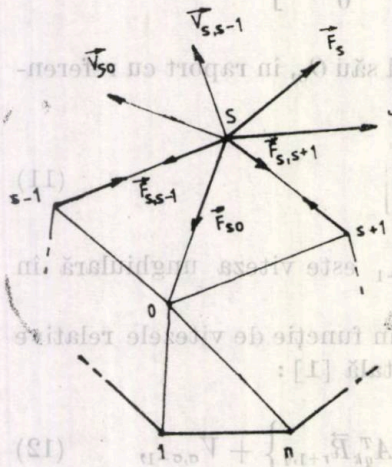


Fig. 2

$$\mu_{sn} = 3(n - s + 1) - l_{s,s-1} - \sum_{s=\sigma}^{n} (l_{\sigma+1,\sigma} + l_{\sigma 0}) \quad (s = 2, 3, \ldots, n) \tag{16}$$

și mobilitatea întregului lanț cinematic

$$\mu_{1n} = 3n - \sum_{\sigma=1}^{n} (l_{\sigma+1,\sigma} + l_{\sigma 0}), \tag{17}$$

unde $l_{\sigma 0}$ este restricția exterioară a razei $\sigma 0$ iar $l_{\sigma+1,\sigma}$, reprezintă restricția interioară a laturii $\sigma+1$, σ din spațiul grafului echivalent.

2. Metoda deplasărilor virtuale

Considerînd cunoscute forțele exterioare, $\vec{f}_p^{\sigma}$, se pot stabili unele relații care să permită studiul mișcării sistemului material, dacă condițiile de echilibru dinamic vor fi exprimate prin metoda deplasărilor virtuale.

Notînd cu

$$\vec{U}_p^{\sigma} = \begin{bmatrix} \vec{u}_p^{\sigma} \\ \vec{0} \end{bmatrix} = [\alpha_p^{\sigma}\ \beta_p^{\sigma}\ 0\ 0\ 0\ 0]^T \tag{18}$$

versorul direcției forței $\vec{f}_p^{\sigma}$ și cu

$$\vec{R}_p^{\sigma} = \begin{bmatrix} \vec{r}_p^{\sigma} \\ \vec{0} \end{bmatrix} = [x_p^{\sigma}\ y_p^{\sigma}\ 0\ 0\ 0\ 0]^T \tag{19}$$

vectorul de poziție al punctului său de aplicație B_p^{σ}, torsorul forțelor exterioare aplicate rigidului T_{σ}, calculat în originea O_{σ}, este dat de vectorul dual

$$\vec{F}_{\sigma} = \sum_{p=1}^{t_{\sigma}} f_p^{\sigma} R_p^{\sigma} \vec{U}_p^{\sigma} \tag{20}$$

unde operatorul

$$R_p^{\sigma} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{e} & 0 \\ \hline \tilde{r}_p^{\sigma} & 0 \end{array}\right] \tag{21}$$

conține matricea diagonală unitate $\hat{e}$ și matricea antisimetrică $\tilde{r}_p^\sigma$.

Vectorii $\vec{F}_\sigma$ vor fi aplicați în punctele σ ale grafului echivalent sub forma unor forțe duale.

Mai departe se calculează torsorul forțelor de inerție aplicate pe solidul T_σ, față de același punct O_σ. Vectorii componenți ai torsorului pot fi exprimați sub forma unitară a unui vector dual [1]:

$$\vec{F}_\sigma = - M_\sigma \dot{\vec{V}}_{\sigma 0} - M_\sigma \Omega_{\sigma 0} \vec{V}_{\sigma 0} - \Omega_{\sigma 0} M_\sigma \vec{\Omega}_{\sigma 0} \tag{22}$$

unde

$$M_\sigma = \left[\begin{array}{c|c} \hat{m}_\sigma & \hat{m}_\sigma \tilde{r}_C^{\sigma T} \\ \hline \hat{m} \tilde{r}_C^\sigma & \hat{J}_\sigma \end{array}\right] \tag{23}$$

reprezintă matricea generală de inerție a rigidului considerat, relativ la axele $O_\sigma, x_\sigma, O_\sigma y_\sigma, O_\sigma z_\sigma$, exprimată în funcție de matricea masei

$$\hat{m}_\sigma = \begin{bmatrix} m_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & m_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & m_\sigma \end{bmatrix}, \tag{24}$$

matricea antisimetrică a momentului static $\hat{m}_\sigma \tilde{r}_C^\sigma$ și de matricea simetrică a tensorului de inerție

$$\hat{J}_\sigma = \begin{bmatrix} J_x^\sigma & -J_{xy}^\sigma & 0 \\ -J_{yx}^\sigma & J_y^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & J_z^\sigma \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Viteza dual absolută $\vec{V}_{\sigma 0}$ se deduce ușor din (12) pentru $s = 1$.

Matricea antisimetrică $\Omega_{\sigma 0}$ și viteza unghiulară absolută $\vec{\Omega}_{\sigma 0}$ au următoarele expresii [1]:

$$\Omega_{\sigma 0} = \sum_{k=1}^{\sigma} A_{\sigma k} \Omega_{k,k-1} A_{\sigma k}^T \tag{26}$$

$$\vec{\Omega}_{\sigma 0} = \sum_{k=1}^{\sigma} A_{\sigma k} \vec{\Omega}_{k,k-1}$$

Forțele duale de inerție $\vec{F}_\sigma$ aplicate asupra punctelor σ din graful echivalent capătă expresii reduse dacă originile O_σ coincid cu centrele de greutate ale corpurilor, adică

$$\vec{F}_\sigma = - M_\sigma \dot{\vec{V}}_{\sigma 0} - \Omega_{\sigma 0} M_\sigma \vec{V}_{\sigma 0}. \tag{27}$$

Această forță de inerție acționează în graful asociat asupra unei particule de masă M_σ având viteza absolută $\vec{V}_{\sigma 0}$ și impulsul cinetic dual $M_\sigma \vec{V}_{\sigma 0}$.

Să presupunem acum că sistemul material realizează o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, în timpul căreia coordonatele relative $x_{\sigma,\sigma-1}$, $y_{\sigma,\sigma-1}$, $\varphi_{\sigma,\sigma-1}$ ale punctului reprezentativ σ capătă variaţii virtuale. Viteza virtuală a rigidului T_σ în punctul său O_σ în raport cu triedrul T_{s-1}, realizată în deplasarea virtuală a subsistemului T_s, T_{s-1}, ..., T_n, este exprimată de vectorul dual

$$\vec{V}_{\sigma,s-1} = \begin{bmatrix} \vec{V}^v_{\sigma,s-1} \\ \vec{\omega}^v_{\sigma,s-1} \end{bmatrix} \tag{28}$$

a cărui expresie este asemănătoare cu cea dată de relaţia (12).

Vitezele duale relative virtuale şi reale vor constitui vectori legaţi de punctele σ din graful echivalent, iar proiecţiile acestor vectori sînt exprimate faţă de referenţialul legat de rigidul T_σ. Vitezele absolute $\vec{V}_{\sigma 0}$, $\vec{\mathscr{V}}_{\sigma 0}$ sînt orientate perpendicular pe razele $\sigma 0$, în timp ce vitezele relative $\vec{V}_{\sigma,\sigma-1}$, $\vec{\mathscr{V}}_{\sigma,\sigma-1}$ au direcţii normale pe laturile $\sigma, \sigma-1$ ale grafului echivalent.

Aplicînd metoda deplasărilor virtuale, condiţia de echilibru dinamic a sistemului de solide este ca puterea virtuală a tuturor forţelor exterioare $\vec{f}^\sigma_p (p = 1, 2, \ldots, t_\sigma)$, aplicate în punctele B^σ_p ale corpurilor T_σ, şi a forţelor de inerţie, corespunzătoare unei deplasări virtuale a subsistemului T_s, T_{s+1}, ..., T_n, compatibilă cu legăturile exterioare şi interioare, să fie egală cu zero.

Să observăm că puterea virtuală care apare în condiţia de echilibru dinamic corespunde unei deplasări virtuale a subsistemului de puncte materiale s, s + 1, ..., în jurul polului fix O, sub acţiunea forţelor duale reale $\vec{F}_s$, $\vec{F}_{s+1}$, ..., $\vec{F}_n$ şi a forţelor duale de inerţie $\vec{\mathscr{F}}_s$, $\vec{\mathscr{F}}_{s+1}$, ..., $\vec{\mathscr{F}}_n$, care se efectuează cu vitezele virtuale duale $\vec{\mathscr{V}}_{s,s-1}$, $\vec{\mathscr{V}}_{s+1,s-1}$, ..., $\vec{\mathscr{V}}_{n,s-1}$ astfel ca lungimile laturilor grafului echivalent să rămînă constante. Condiţia enunţată se exprimă prin relaţia generală

$$\sum_{\sigma=s}^{n} \vec{\mathscr{V}}^T_{\sigma,s-1} \{\vec{F}_\sigma + \vec{\mathscr{F}}_\sigma\} = 0, \tag{29}$$

care se mai scrie

$$\sum_{\sigma=s}^{n} \vec{\mathscr{V}}^T_{\sigma,s-1} \left\{ \sum_{p=1}^{t_\sigma} f^\sigma_p R^\sigma_p \vec{U}^\sigma_p - M_\sigma \dot{\vec{V}}_{\sigma 0} - \right.$$

$$\left. - M_\sigma \Omega_{\sigma 0} \vec{V}_{\sigma 0} - \Omega_{\sigma 0} M_\sigma \vec{\Omega}_{\sigma 0} \right\} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{30}$$

Dezvoltînd calculele, relaţiile precedente pot fi scrise şi astfel

$$\sum_{\sigma=1}^{n} \vec{v}^{vT}_{\sigma,s-1} \left\{ \sum_{p=1}^{t_\sigma} f^\sigma_p \vec{u}^\sigma_p - \hat{m}_\sigma \{\dot{\vec{v}}_{\sigma 0} + \tilde{\omega}_{\sigma 0} \vec{v}_{\sigma 0} + \{\tilde{\omega}^2_{s0} + \dot{\tilde{\omega}}_{s0}\} \vec{r}^\sigma_C\} \right\} +$$

$$+ \sum_{\sigma=s}^{n} \vec{\omega}^{vT}_{\sigma,s-1} \left\{ \sum_{p=1}^{n} f^\sigma_p \tilde{r}^\sigma_p \vec{u}^\sigma_p - \hat{J}_\sigma \dot{\vec{\omega}}_{\sigma 0} - \tilde{\omega}_{\sigma 0} \hat{J}_\sigma \vec{\omega}_{\sigma 0} - \hat{m}_\sigma \tilde{r}^\sigma_C \{\dot{\vec{v}}_{\sigma 0} + \tilde{\omega}_{\sigma 0} \vec{v}_{\sigma 0}\} \right\} = 0, \tag{31}$$

unde vitezele virtuale $\vec{v}^v_{\sigma,s-1}$ și $\vec{\omega}^v_{\sigma,s-1}$ au expresiile

$$\vec{v}^v_{\sigma,s-1} = \sum_{k=s}^{\sigma-1} a_{\sigma k}\left\{\vec{v}^v_{k,k-1} + \tilde{\omega}^v_{k,k-1}\sum_{q=k}^{\sigma-1} a^T_{qk}\tilde{r}_{q+1,q}\right\} + \vec{v}^v_{\sigma,\sigma-1}$$

$$\vec{\omega}^v_{\sigma,s-1} = \sum_{k=s}^{\sigma} a_{\sigma k}\vec{\omega}^v_{k,k-1}, \tag{32}$$

în care

$$\vec{v}^v_{k,k-1} = [v^{k,k-1}_{vx}\ v^{k,k-1}_{vy}\ 0]^T$$

$$\vec{\omega}^v_{k,k-1} = \omega^v_{k,k-1}[0\ 0\ 1]^T. \tag{33}$$

Condițiile cinematice de legătură, la care sînt supuse vitezele absolute și relative ale punctelor de contact, în cadrul mișcărilor reale sau virtuale se exprimă prin relații de forma

$$\begin{aligned}
&\vec{V}^T_{\sigma 0}R^{\sigma 0}_i A_{\sigma 0}\vec{G}^{\sigma 0}_i = 0\\
&\vec{\mathscr{V}}^T_{\sigma 0}R^{\sigma 0}_i A_{\sigma 0}\vec{G}^{\sigma 0}_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots, l_{\sigma 0})\\
&\vec{V}^T_{\sigma,\sigma-1}R^{\sigma,\sigma-1}_i A_{\sigma,\sigma-1}\vec{G}^{\sigma,\sigma-1}_i = 0\\
&\vec{\mathscr{V}}^T_{\sigma,\sigma-1}R^{\sigma,\sigma-1}_i A_{\sigma,\sigma-1}\vec{G}^{\sigma,\sigma-1}_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ l_{\sigma,\sigma-1})\\
&(\sigma = s,\ s+1,\ \ldots, n;\ s = 1,\ 2,\ \ldots, n),
\end{aligned} \tag{34}$$

unde matricele

$$\vec{G}^{\sigma 0}_i = \left[\frac{\vec{\nabla}h^{\sigma 0}_i}{\vec{0}}\right],\quad \vec{G}^{\sigma,\sigma-1}_i = \left[\frac{\vec{\nabla}h^{\sigma,\sigma-1}_i}{\vec{0}}\right] \tag{35}$$

conțin vectorii gradienți $\vec{\nabla}h^{\sigma 0}_i$, $\vec{\nabla}h^{\sigma,\sigma-1}_i$.

Reluînd ecuațiile (29), le putem aplica pentru echilibrul dinamic al subsistemului de puncte $s+1,\ s+2,\ \ldots, n$ sub forma analoagă

$$\sum_{\sigma=s+1}^{n}\vec{\mathscr{V}}^T_{\sigma s}\{\vec{F}_\sigma + \vec{\mathscr{F}}_\sigma\} = 0 \tag{36}$$

în care viteza virtuală duală $\vec{\mathscr{V}}_{\sigma 0}$ poate fi calculată cu relația matriceală

$$\vec{\mathscr{V}}_{\sigma s} = \vec{\mathscr{V}}_{\sigma,s-1} - A_{\sigma s}\{\vec{\mathscr{V}}_{s,s-1} + \Omega^v_{s,s-1}\vec{R}_{\sigma s}\} \tag{37}$$

Efectuînd calculele se obține o nouă formă a ecuațiilor de mișcare pentru sistemul de corpuri

$$\vec{\mathscr{V}}^T_{s,s-1}\sum_{\sigma=s}^{n}A^T_{\sigma s}\{\vec{F}_\sigma + \vec{\mathscr{F}}_\sigma\} + \vec{\Omega}^T_{s,s-1}\sum_{\sigma=s+1}^{n}R_{\sigma s}A^T_{\sigma s}\{\vec{F}_\sigma + \vec{\mathscr{F}}_\sigma\} = 0. \tag{38}$$

Dacă se dezvoltă rezultă

$$\vec{v}^{vT}_{s,s-1}\sum_{\sigma=s}^{n} a^T_{\sigma s}\left\{\sum_{p=1}^{t_\sigma} f^\sigma_p \vec{u}^\sigma_p - \hat{m}_\sigma\{\dot{\vec{v}}_{\sigma 0}+\tilde{\omega}_{\sigma 0}\vec{v}_{\sigma 0}+\{\tilde{\omega}^2_{\sigma 0}+\dot{\tilde{\omega}}_{\sigma 0}\}\vec{r}^\sigma_C\}\right\}+$$

$$+\vec{\omega}^{vT}_{s,s-1}\left\{\sum_{\sigma=s}^{n} a^T_{\sigma s}\left\{\sum_{p=1}^{t_\sigma} f^\sigma_p \tilde{r}^\sigma_p \vec{u}^\sigma_p - \hat{J}_\sigma\dot{\vec{\omega}}_{\sigma 0}-\tilde{\omega}_{\sigma 0}\hat{J}_\sigma\vec{\omega}_\sigma-\hat{m}_\sigma\tilde{r}^\sigma_C\{\dot{\vec{v}}_{\sigma 0}+\tilde{\omega}_{\sigma 0}\vec{v}_{\sigma 0}\}\right\}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\sigma=s+1}^{n}\tilde{r}_{\sigma s}a^T_{\sigma s}\left\{\sum_{p=1}^{t_\sigma} f^\sigma_p\vec{u}^\sigma_p-\hat{m}_\sigma\{\dot{\vec{v}}_{\sigma 0}+\tilde{\omega}_{\sigma 0}\vec{v}_{\sigma 0}+\{\tilde{\omega}^2_{\sigma 0}+\dot{\tilde{\omega}}_{\sigma 0}\}\vec{r}^\sigma_C=0,\right.\right.$$

$$(\mu_{s,s-1}\geqslant 1). \tag{39}$$

Deoarece legăturile subsistemului T_s, T_{s+1}, ..., T_n permit deplasări virtuale dacă $\mu_{sn}\geqslant 1$, sistemul (34) va conține μ_{sn} viteze virtuale independente $v^{\sigma,\sigma-1}_{vx}$, $v^{\sigma,\sigma-1}_{vy}$, $\omega^{\sigma,\sigma-1}_{\sigma,\sigma-1}$, $\sigma\in[s,n]$, în funcție de care se poate exprima restul

$$\mu^*_{sn}=l_{s,s+1}+\sum_{\sigma=s}^{n}(l_{\sigma+1,s}+l_{\sigma 0}) \tag{40}$$

de viteze virtuale. Introducînd aceste expresii în (39) se obține un sistem de μ_{sn} ecuații.

Un alt grup de relații rezultă din condițiile impuse punctelor de contact de a rămîne pe curbele considerate, adică

$$\vec{R}^0_{i\sigma}-A^T_{\sigma 0}\vec{R}^{\sigma 0}_i=\sum_{k=0}^{\sigma-1}A^T_{k0}\vec{R}_{k+1,k}$$

$$\vec{R}^{\sigma-1}_{i\sigma}-A^T_{\sigma,\sigma-1}\vec{R}^{\sigma,\sigma-1}_i=\vec{R}_{\sigma,\sigma-1}. \tag{41}$$

Deci relațiile (41) formează cu (15) și (39) un număr de $3(n-s+1)+2\left\{l_{s,s-1}+\sum_{\sigma=s}^{n}(l_{\sigma+1,\sigma}+l_{\sigma 0})\right\}$ ecuații diferențiale din care rezultă coordonatele $x_{\sigma,\sigma-1}$, $y_{\sigma,\sigma-1}$, $\varphi_{\sigma,\sigma-1}$.

BIBLIOGRAFIE

1. *Șt. Staicu*, Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor, Edit. Academiei Române, București, 1986.
2. *C. Iacob*, Mecanica teoretică, Editura Didactică și pedagogică, București, 1971.
3. *R. Voinea, D. Voiculescu, V. Ceauşu*, Mecanica, Edit. Didactică și pedagogică, București, 1983.
4. *D. Mangeron, N. Irimiciuc*, Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie, Edit. Tehnică, București, 1978.
5. *Gh. Silaş, I. Groşanu*, Mecanica, Edit. Didactică și pedagogică, București, 1981.
6. *M. Atanasiu*, Mecanica, Edit. Didactică și pedagogică, București, 1973.
7. *R. Voinea, M. Atanasiu*, Metode analitice noi în teoria mecanismelor, Edit. Tehnică, București, 1964.

Modèle théorique des équations dans la dynamique des systèmes plans

L'article détermine, sous la forme matricielle, les équations différentielles pour le mouvement plan-parallèle d'un système de solides, s'appuyant sans frottement contre plusieur courbes planes, par la méthode du graphe équivalent. En appliquant le principe des déplacements virtuels des relations d'équilibre dynamique conduisant à la détermination des lois du mouvement sont établies..

C.Z: 621.79: 539.4

ANALIZA STĂRII DE TENSIUNI ÎN ZONA DE ÎMBINARE DINTRE CORPUL CILINDRIC AL UNUI RECIPIENT ȘI O FLANȘĂ PLATĂ SUDATĂ

MIHAELA PĂUNESCU, C. TACĂ, MARIANA ȘTEFĂNESCU*

În lucrarea de față este analizată comparativ, cu ajutorul a trei metode de calcul, starea de tensiuni din peretele unui recipient cilindric, în zona situată în imediata apropiere a unei flanșe plate sudate.

Este prezentată evoluția tensiunilor și a coeficienților de concentrare a tensiunilor în această zonă, în funcție de diametrul nominal al flanșei.

1. Introducere

Cunoașterea stării de tensiuni în zona de îmbinare a flanșei plate, cu corpul unui recipient cilindric, este deosebit de utilă pentru aprecierea rezistenței (la solicitare statică sau la oboseală oligociclică), rigidității și implicit a etanșeității asamblărilor cu flanșe.

În lucrarea de față, se analizează starea de tensiuni din peretele unui recipient cilindric, în zona situată în imediata apropiere a flanșei plate sudate, avîndu-se în vedere flanșele plate standardizate conform STAS 9801/4-79.

Abordarea problemei s-a efectuat prin intermediul a trei metode de calcul, care vor fi prezentate în cele ce urmează.

Metoda I-a. Conform acestei metode [1, 2], se consideră că flanșa este o placă inelară (rezemată pe cercul de amplasare a șuruburilor), iar corpul recipientului se tratează ca un înveliș cilindric cu perete subțire.

Pornind de la aceste considerații, în cadrul metodei vor fi utilizate relațiile de calcul aferente plăcilor circulare subțiri, respectiv teoriei învelișurilor.

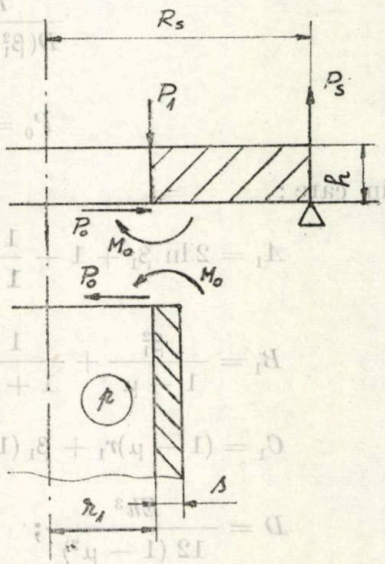


Fig. 1 — Metoda I-a. Schema de calcul

* Șef lucrări ing.; Asist. ing.; Asist. ing., catedra Utilaj tehnologic chimic

Așa după cum se poate observa din schema de calcul prezentată în figura 1, flanșa este delimitată la exterior de cercul de amplasare a șuruburilor (cu diametrul D_s), iar forța de desfacere P_1, este uniform distribuită pe circumferința interioară a flanșei; P_0 și M_0 sînt forțele și momentele uniform distribuite, care rezultă în urma separării flanșei de corpul cilindric al recipientului.

Grosimea peretelui recipientului fiind mică în comparație cu raza recipientului, se acceptă ipoteza conform căreia raza medie a învelișului cilindric este egală cu raza sa interioară.

În urma celor prezentate mai sus, se pot stabili ecuațiile de continuitate:

$$\frac{4k^3r_1^2}{sE}M_0 + \frac{2k^2r_1^2}{sE}P_0 = \frac{P_1r_1}{8\pi D}A_1 - \frac{M_0r_1}{D(\beta_1^2-1)}B_1; \tag{1}$$

$$\frac{P_0}{Eh(\beta_1^2-1)}[(1-\mu)r_1 + \beta(1+\mu)R_s] + \frac{(2-\mu)r_1^2p}{2(R_s-r_1)E} =$$

$$= \frac{(2-\mu)r_1^2}{2sE}p - \frac{2k^2r_1^2}{sE}M_0 - \frac{2kr_1^2}{sE}P_0, \tag{2}$$

de unde rezultă cele două necunoscute M_0 și P_0, sub forma:

$$M_0 = \frac{\dfrac{P_1A_1}{8\pi D} - \dfrac{2k^2r_1G}{sEF_1}p}{\dfrac{B_1}{D(\beta_1^2-1)} + \dfrac{4k^3r_1}{sE} - \dfrac{4k^4r_1}{s^2EF_1}}; \tag{3}$$

$$P_0 = \frac{G}{F_1}p - \frac{2k^2}{sF_1}M_0; \tag{4}$$

în care:

$$A_1 = 2\ln\beta_1 + 1 + \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\ln\beta_1}{\beta_1^2-1}\left(1+\beta_1^2\frac{1+\mu}{1-\mu}\right);$$

$$B_1 = \frac{\beta_1^2}{1-\mu} + \frac{1}{1+\mu};$$

$$C_1 = (1-\mu)r_1 + \beta_1(1+\mu)R_s;$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)};$$

D_{mg} = diametrul mediu al garniturii; $(D_{mg} = 2R_{mg})$;

E = modulul de elasticitate;

$$F_1 = \frac{C_1}{r_1^2 h(\beta_1^2 - 1)} + \frac{2k}{s};$$

$$G = \frac{2 - \mu}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{R_s - r_1}\right);$$

$$k = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{r_1 \cdot s}};$$

$$P_1 = \frac{\pi \cdot D_{mg}}{4} \cdot p;$$

p = presiune interioară;

$$\beta_1 = \frac{R_s}{r_1};$$

μ = coeficientul lui Poisson.

Cu ajutorul valorilor P_0 și M_0 astfel determinate, se pot calcula tensiunile axiale și inelare din învelișul cilindric, în zona de îmbinare cu flanșa. În ipoteza solicitării în domeniul elastic, pentru calculul tensiunilor se poate aplica principiul suprapunerii efectelor:

$$\sigma_1 = \sigma_1^m \pm \sigma_1^{M_0}; \tag{5}$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^m + \sigma_2^{P_0} \pm \sigma_2^{M_0} + \bar{\sigma}_2^{M_0}, \tag{6}$$

unde:

$$\sigma_1^m = \frac{p \cdot r_1}{2s}; \quad \sigma_1^{M_0} = \pm \frac{6M_0}{s^2};$$

$$\sigma_2^m = \frac{p \cdot r_1}{s}; \quad \sigma_2^{M_0} = \pm \frac{6k}{s^2}; \quad \bar{\sigma}_2^{M_0} = \frac{T^{M_0}}{s}; \quad \sigma_2^{P_0} = \frac{T^{P_0}}{s};$$

$$T^{M_0} = 2k^2 r_1 M_0; \quad T^{P_0} = 2kr_1 P_0; \quad K = \mu M_0.$$

În continuare, după determinarea tensiunilor echivalente $\sigma_{ech,i}$ și $\sigma_{ech,e}$, la suprafața interioară, respectiv exterioară a învelișului cilindric, se trece la calculul coeficienților de concentrare a tensiunilor $\alpha_{k,i}$ și $\alpha_{k,e}$,

la suprafața interioară, respectiv exterioară a învelișului cilindric :

$$\alpha_{k,i} = \frac{\sigma_{ech,i}}{\sigma^m_{ech}}; \tag{7}$$

$$\alpha_{k,e} = \frac{\sigma_{ech,i}}{\sigma^m_{ech}}, \tag{8}$$

unde σ^m_{ech} este tensiunea echivalentă membrană.

Tensiunile echivalente se determină aplicînd teoriile de rezistență :

— după teoria a 3-a : $\sigma_{ech} = \sigma_{max}$;

— după teoria a 4-a : $\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$.

Metoda a II-a. Conform acestei metode [3, 4], se consideră că flanșa este un inel care se rotește datorită momentului de torsiune M_t(uniform distribuit pe circumferința r_0, care trece prin centrul de greutate al secțiunii inelului), provocat de forța F_2, uniform distribuită pe circumferința exterioară a flanșei (fig. 2).

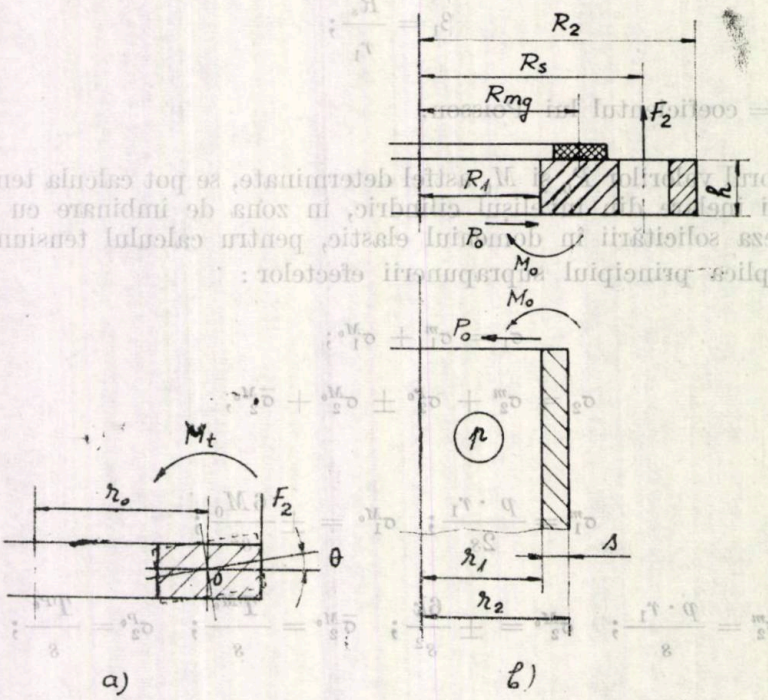


Fig. 2 — Metoda a II-a. Schema de calcul

În același timp, se acceptă ipoteza potrivit căreia, flanșa este un corp rigid, adică, sub acțiunea momentului M_t nu au loc deplasări radiale, ci numai rotirea secțiunii transversale cu unghiul θ_1.

Avînd în vedere schema de calcul prezentată în figura 2, ecuațiile de continuitate au forma:

$$\frac{2-\mu}{2Es} r_1^2 p + \frac{2k}{Es} r_1^2 P_0 + \frac{2k^2}{Es} r_1^2 M_0 = 0; \tag{9}$$

$$\frac{4k^3}{Es} r_1^2 M_0 + \frac{2k^2}{Es} r_1^2 P_0 = \theta_1, \tag{10}$$

de unde rezultă cele două necunoscute M_0 și P_0 sub forma:

$$M_0 = \frac{A_2 \cdot F_2(R_s - r_1) + \dfrac{A \cdot h(2-\mu)\, p}{8 \cdot k} - \dfrac{2-\mu}{8k^2} p}{\dfrac{1}{2} + A_2 \left(1 + \dfrac{k \cdot h}{2}\right)}; \tag{11}$$

$$P_0 = \frac{2-\mu}{4k} p - k \cdot M_0, \tag{12}$$

unde:

$$A_2 = \frac{3s}{k^3 \cdot h^3 \cdot r_1 \cdot \ln \dfrac{R_s}{r_1}};$$

F_D, F_T, F_G — conform [7];

$$F_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R_s} \cdot \frac{1}{\beta - 1} \left[P_{se} \cdot \frac{R_{mg}}{R_1} \left(\frac{R_s}{R_{mg}} - 1 \right) + P_{1e} \left(\frac{R_{mg}}{R_1} - 1 \right) \right];$$

conf. [6];

$P_{se} = F_D + F_T + F_G$; forța din șuruburi în exploatare;

$$P_{1e} = F_D + F_T;$$

$$M_t = \left[F_2(R_s - r_1) - M_0 + P_0 \cdot \frac{h}{2} \right] \frac{r_1}{r_0};$$

$$\beta = \frac{R_2}{R_1};$$

$$\theta_1 = \frac{12 \cdot M_t \cdot r_0}{E \cdot h^3 \cdot \ln \left(\dfrac{R_s}{r_1} \right)}.$$

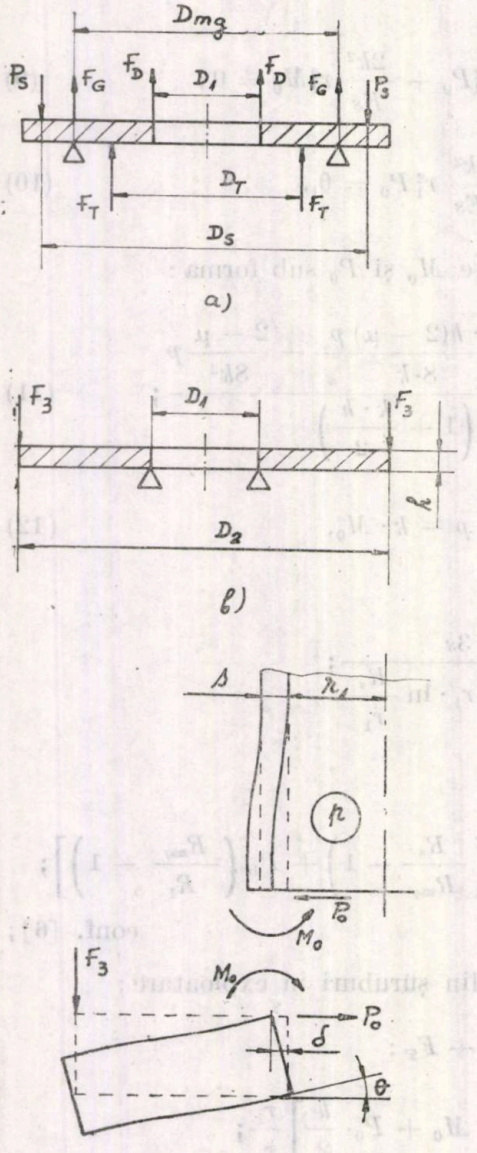


Fig. 3 — Metoda a III-a. Schema de calcul

Starea de tensiuni din învelișul cilindric, în zona de îmbinare cu flanșa, precum și coeficienții de concentrare a tensiunilor în această zonă, se determină cu relațiile prezentate în cadrul metodei precedente.

Metoda a III-a. Conform acestei metode [8], se consideră că flanșa este o placă rezemată (în dreptul garniturii), care se deformează sub acțiunea forței F_3, uniform distribuită pe circumferința exterioară a flanșei (fig. 3). Forța F_3 provoacă, în același timp, și deformația învelișului cilindric de care este sudată flanșa.

În urma considerațiilor anterioare, se poate stabili forma ecuațiilor de continuitate :

$$k_{11}P_0 - k_{12}M_0 = \delta; \qquad (13)$$

$$-k_{21}P_0 + k_{22}M_0 = \theta. \qquad (14)$$

În urma rezolvării acestui sistem, se determină necunoscutele M_0 și P_0 :

$$M_0 = \theta \cdot \frac{0{,}5 \cdot h \cdot k_{12} + k_{11}}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}; \qquad (15)$$

$$P_0 = \theta \cdot \frac{0{,}5 \cdot h \cdot k_{22} + k_{12}}{k_{11} \cdot k_{22} - k_{12}^2}, \qquad (16)$$

sau,

$$M_0 = \frac{F_3 \cdot C_3}{2N}; \qquad (17)$$

$$P_0 = \frac{F_3 \cdot C_3}{2K_1}, \qquad (18)$$

unde :

$$A_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\beta(1+\mu)} + \frac{2\beta \cdot \ln\beta}{(1-\mu)(\beta^2-1)}\right];$$

$$B_3 = \frac{}{^2-1}\left[\frac{1}{(1+\mu)\cdot{}^2} + \frac{1}{1-\mu}\right];$$

$$C_3 = \frac{A_3 \cdot D_2}{D + 0{,}5 \cdot L \cdot B_3 \cdot D_2};$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)};$$

$$D_{mc} = D_1 + s; \quad D_T - \text{conform [7]};$$

$$F_3 = \frac{F_D(D_S - D_1) + F_G(D_S - D_{mg}) + F_T(D_S - D_T)}{D_2 - D_1};$$

$k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ — Coeficienți de influență, conform [8];

$$K_1 = \frac{5{,}45 \cdot D_{mc}}{\left(\frac{4{,}25 \cdot h}{M} + 3{,}3\right) s^2};$$

$$L = \left(0{,}779 \cdot M + \frac{0{,}644}{M} \cdot h^2 + h\right) \cdot \frac{s^2}{1{,}05 \cdot D_{mc}};$$

$$M = \sqrt{0{,}5 \cdot D_{mc} \cdot s};$$

$$N = \frac{3{,}3 \cdot D_{mc}}{(h + 1{,}565 \cdot M)\, s^2};$$

$$\beta = \frac{D_2}{D_1};$$

$$\delta = \theta \cdot \frac{h}{2};$$

$$\theta = \frac{F_3 C_3}{2E};$$

În continuare, starea de tensiuni și coeficienții de concentrare a tensiunilor se determină ca și în cazul metodelor precedente.

Rezultatele calculelor. Concluzii

Cele trei metode de calcul prezentate anterior, au fost aplicate pe un lot de 26 flanșe, plate, cu diametre diferite și cu geometria prezentată în STAS 9801/4—79.

Rezultatele cercetărilor sînt prezentate în diagramele din figurile 4 și 5, în care se pot observa care sînt variațiile tensiunilor echivalente și a coeficienților de concentrare a tensiunilor, în funcție de diametrul nominal al recipientului.

În urma analizei rezultatelor, se pot trage următoarele concluzii :

a) tensiunea maximă din peretele recipientului cilindric este tensiunea meridională (de întindere), care are un efect defavorabil asupra comportării zonei respective la oboseală ;

b) coeficientul de concentrare a tensiunilor, α_k, atinge valori maxime la suprafața exterioară a învelișului cilindric, în dreptul îmbinării cu flanșa ;

c) valoarea coeficientului de concentrare a tensiunii depinde, în principal, de momentul M_0, uniform distribuit pe circumferința îmbinării ; acesta, la rîndul său, depinde de parametrii geometrici și de caracteristicile materialelor folosite ;

d) deoarece valorile calculate ale lui α_k sînt mari, înseamnă că local, pentru unele flanșe, în anumite momente ale ciclului de funcționare, învelișul cilindric poate intra în curgere ;

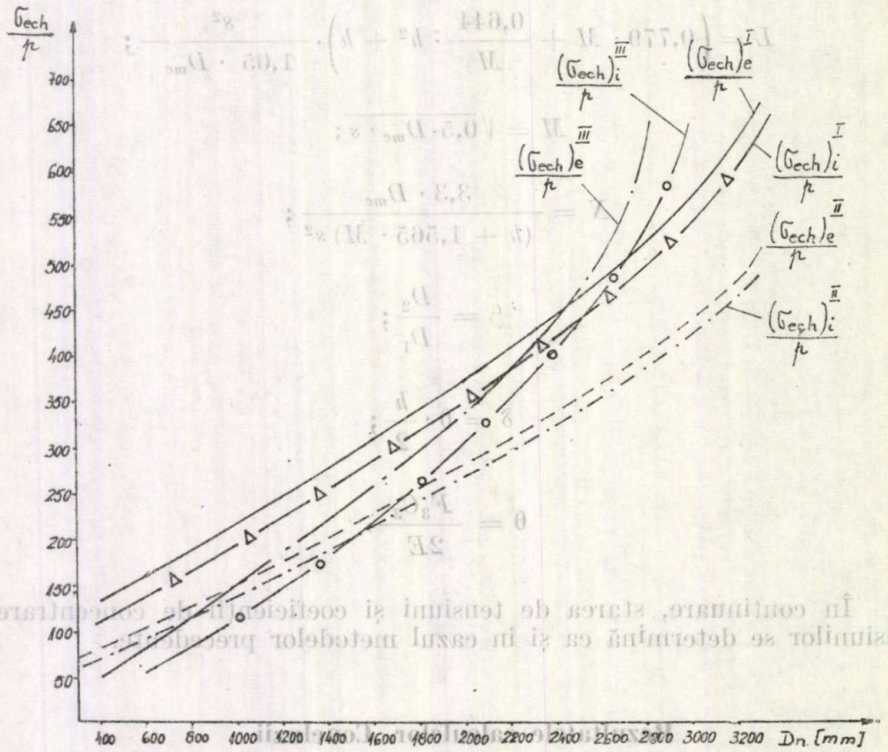


Fig. 4 — Variația tensiunii echivalente în funcție de diametrul nominal al recipientului

$(\sigma_{ech})_{e(i)}$ = tensiunea echivalentă la suprafața exterioară (respectiv interioară) a învelișului cilindric, calculată conform metodei I-a (respectiv a II-a și a III-a)

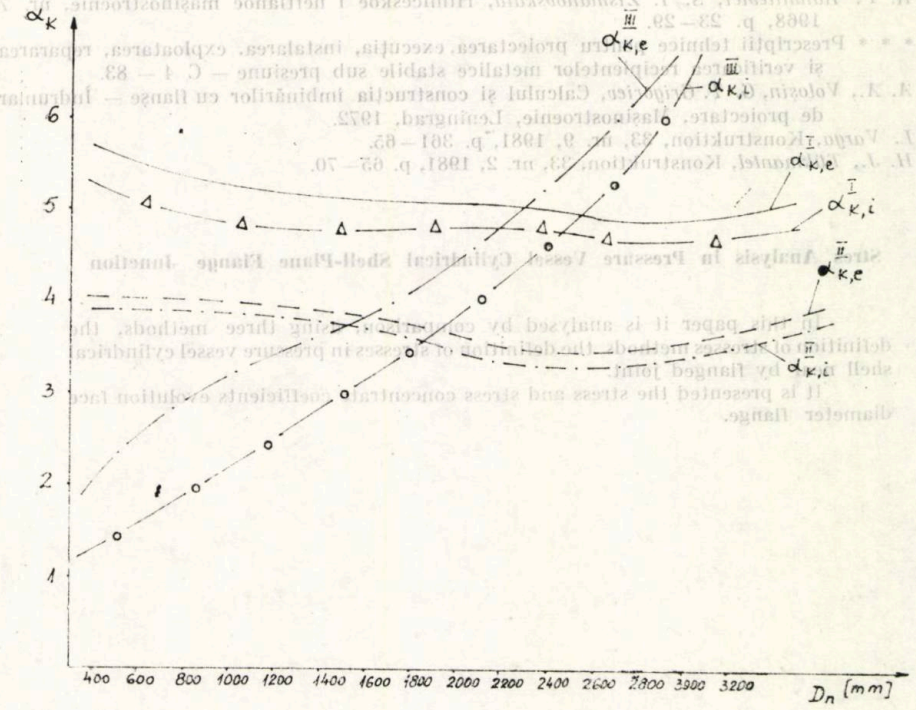


Fig. 5 — Variația coeficientului de concentrare a tensiunii, în funcție de diametrul nominal al recipientului

$\alpha_{k,i(e)}^{I(II,III)}$ = coeficient de concentrare a tensiunii, la suprafața interioară, (respectiv exterioară) a învelișului cilindric, calculat conform metodei I-a (respectiv a II-a și a III-a)

e) coeficienții de concentrare, calculați după cele trei metode prezentate, sînt coeficienți teoretici; ei nu țin cont de forma cordonului de sudură, îndeosebi de extinderea lui axială;

f) avînd în vedere diferențele dintre valorile lui α_k, obținute după cele trei metode, autorii recomandă utilizarea diferențiată a acestor metode; astfel, pentru diametre nominale ale flanșelor cuprinse între 300 și 1600 mm este recomandată metoda a III-a, iar pentru diametre între 1700 și 3200 mm, metoda a II-a.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Renert*, Calculul și construcția utilajului chimic, vol. I, E.D.P., București, 1971.
2. *D. D.Cioclov*, Recipiente sub presiune. Editura Academiei R.S.R., București, 1983.
3. *V. V. Jinescu*, Utilaj tehnologic pentru industrii de proces, vol. I, E. T., București, 1983
4. *A. D. Domașnov*, Utilaje pentru industria chimică. E. T., București, 1962.
5. *V. V. Jinescu*, Utilaj tehnologic pentru industrii de proces, vol. III,, E. T., București, 1988.

6. *R. F. Rahmilevici, S. I. Zismanovskaia*, Himiceskoe i neftianoe maşinostroenie, nr. 7 1968, p. 23—29.
7. * * * Prescripţii tehnice pentru proiectarea, execuţia, instalarea, exploatarea, repararea şi verificarea recipientelor metalice stabile sub presiune — C 4 — 83.
8. *A. A., Voloşin, G. T. Grigoriev*, Calculul şi construcţia îmbinărilor cu flanşe — Îndrumar de proiectare, Maşinostroenie, Leningrad, 1972.
9. *L. Varga*. Konstruktion, 33, nr. 9, 1981, p. 361—65.
10. *H. J., Tükmantel*, Konstruktion, 33, nr. 2, 1981, p. 65—70.

Stres Analysis in Pressure Vessel Cylindrical Shell-Plane Flange Junction

In this paper it is analysed by comparison, using three methods, the definition of stresses methods, the definition of stresses in pressure vessel cylindrical shell near by flanged joint.

It is presented the stress and stress concentrate coefficients evolution face diameter flange.

C.Z: 628.974

MATRICE DE REȚELE ZONATE PENTRU ILUMINARE UNIFORMĂ ÎN INSTALAȚII DE MICROLITOGRAFIERE

E. CURATU*

În tehnologia de microlitografie uniformitatea iluminării planului obiect influențează în mod direct calitatea măștilor circuitelor integrate. După o scurtă prezentare a unor sisteme de iluminare care urmăresc realizarea unui grad cît mai ridicat de uniformitate a iluminării, lucrarea propune un sistem original folosind matrice de rețele zonate în lumină telecentrică monocromatică. Sînt date relațiile de proiectare. Înlocuirea matricelor de lentile (utilizate în prezent în unele instalații de microlitografie prin proiecție) cu rețele zonate permite utilizarea unei tehnologii cu un consum material și energetic redus și, în același timp, asigură o calitate superioară oricărui procedeu.

În tehnologia de microlitografie unul dintre factorii care influențează calitatea măștilor circuitelor integrate este gradul de uniformitate a iluminării planului obiect, definit prin raportul dintre variația iluminări ΔE și nivelul mediu al acesteia $\bar{E}_m$. În construcția instalațiilor de microlitografiere intră diferite tipuri de sisteme de iluminare, care urmăresc realizarea unui grad cît mai ridicat de uniformitate a iluminării [1]. Rezolvarea problemei este cu atît mai dificilă cu cît cîmpul obiect este mai mare. În instalațiile microfotografice de obținere a primei reduceri (de la 10 : 1 pînă la 50 : 1 a unor cîmpuri obiect de pînă la $2{,}6 \times 2{,}6$ m^2) se utilizează sisteme de iluminare prin transparență (dia) sau prin incidență (epi) după cum obiectul este transparent sau opac (fig. 1). În privința gradului de uniformitate a iluminării sistemele prin transmisie sînt preferate; se folosesc lămpi fluorescente și ecrane difuzante.

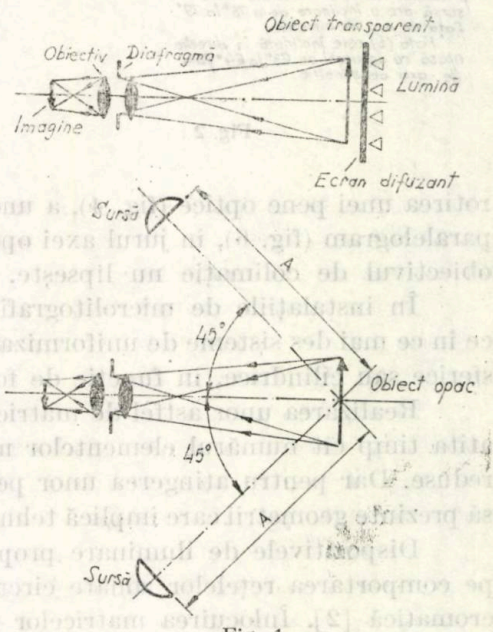


Fig. 1

* Șef lucrări dr. ing., catedra Mecanică fină

Modalităţile de realizare a uniformizării iluminării unor cîmpuri obiect mari şi foarte mari (de la 200 × 200 mm² la 2,6 × 2,6 m²) sînt total diferite de cele utilizate pentru cîmpuri mai mici. În lucrarea de faţă ne vom referi numai la cel din urmă caz. În figurile 2 ÷ 6 sînt reprezentate schemele unor sisteme de iluminare utilizate în microlitografia prin contact. Ideea care stă la baza tuturor soluţiilor este multiplicarea sursei şi realizarea iluminării cu fascicule telecentrice. Aceasta se realizează static printr-un sistem de prisme (fig. 2.) sau oglinzi (fig. 3.), sau dinamic, prin

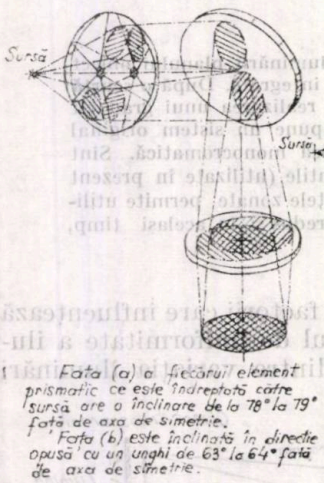


Fig. 2

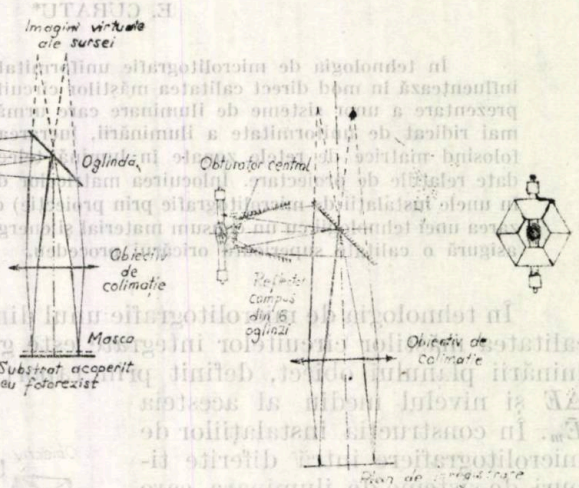


Fig. 3

rotirea unei pene optice (fig. 4), a unei oglinzi (fig. 5) sau a unei prisme paralelogram (fig. 6), în jurul axei optice; în toate sistemele de iluminare obiectivul de colimaţie nu lipseşte.

În instalaţiile de microlitografiere prin proiecţie se utilizează din ce în ce mai des sisteme de uniformizare a iluminării cu matrice de lentile sferice sau cilindrice, în funcţie de forma şi dimensiunile sursei (fig. 7.)

Realizarea unor astfel de matrice nu reprezintă o problemă dificilă, atîta timp cît numărul elementelor matricei şi gradul de umplere rămîn reduse. Dar pentru atingerea unor performanţe ridicate matricele trebuie să prezinte geometrii care implică tehnologii mecanice şi optice costisitoare.

Dispozitivele de iluminare propuse în lucrarea de faţă se bazează pe comportarea reţelelor zonate circulare sau paralele în lumină monocromatică [2]. Înlocuirea matricelor de lentile cu reţele zonate permite utilizarea tehnologiei de microlitografie cu asigurarea unei calităţi superioare oricărui alt procedeu, cu un consum material şi energetic redus.

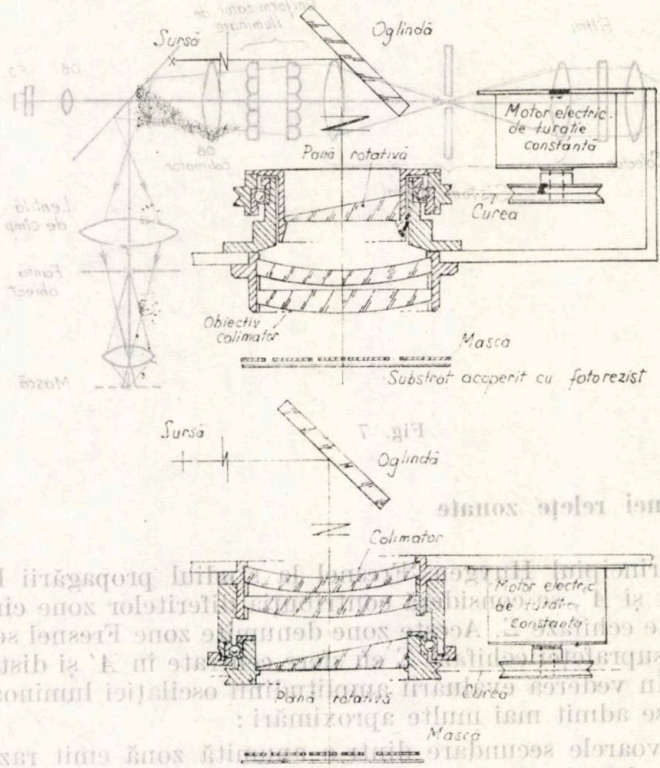


Fig. 4

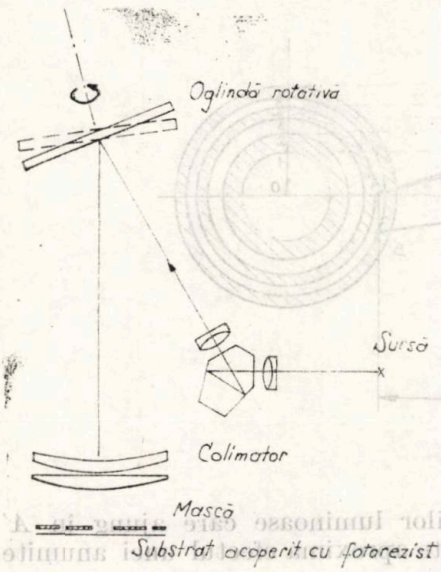


Fig. 5

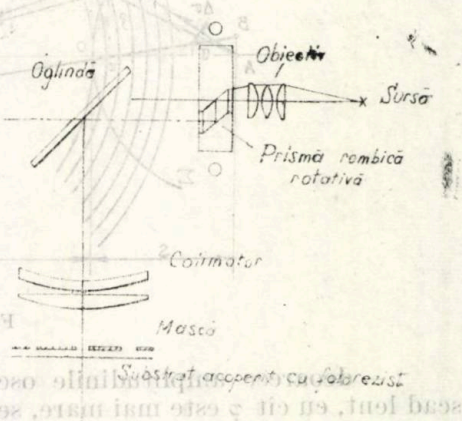


Fig. 6

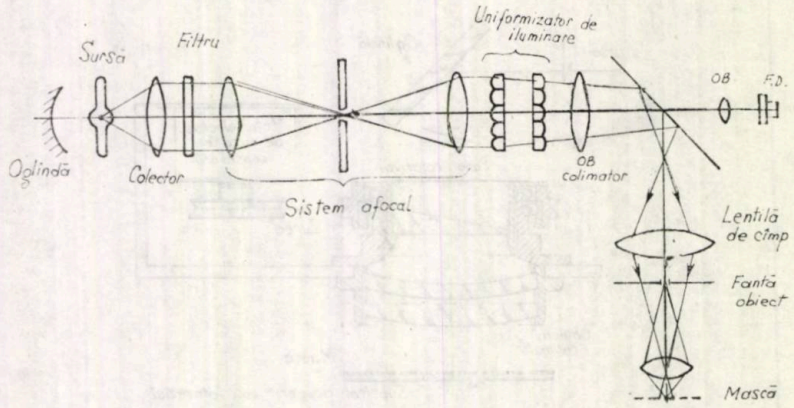


Fig. 7

Calculul unei relețe zonate

Aplicînd principiul Huygens-Fresnel la studiul propagării luminii între punctele A și A', se consideră contribuția diferitelor zone circulare ale unei suprafețe echifaze Σ. Aceste zone denumite zone Fresnel se obțin prin intersecția suprafeței echifaze Σ cu sfere centrate în A' și distanțate cu $\lambda/2$ (fig. 8). În vederea evaluării amplitudinii oscilației luminoase rezultante în A', se admit mai multe aproximări :

— toate izvoarele secundare dintr-o anumită zonă emit raze care ajung în fază în punctul A'; două zone alăturate emit raze care sînt în opoziție de fază în punctul A';

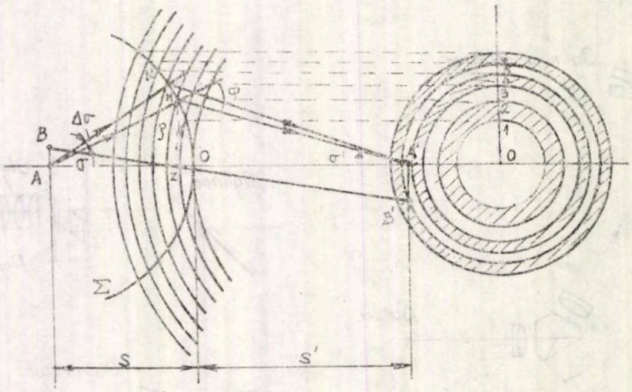


Fig. 8

— deoarece amplitudinile oscilațiilor luminoase care ajung în A' scad lent, cu cît φ este mai mare, se poate aproxima efectul unei anumite

zone asupra amplitudinii rezultante în A' ca fiind media efectelor zonelor alăturate celei considerate.

Din figura 8 se deduc relațiile pentru calculul razei zonei de ordinul k :

$$\rho_k^2 = (2s - z_k) \cdot z_k \simeq 2sz_k$$

$$\rho_k^2 = (2s' + k \cdot \lambda/2 + z_k) \cdot (k \cdot \lambda/2 - z_k) \simeq 2s'(k\lambda/2 - z_k)$$

$$z_k = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{s'}{s + s'} \cdot k \rightarrow \rho_k = \left(\lambda \cdot \frac{s \cdot s'}{S + s'} \right)^{1/2} \cdot k^{1/2} \qquad (1)$$

Aria zonei de ordinul k este :

$$\Delta S_k = 2\pi s(z_k - z_{k-1}) = \pi \cdot \lambda \frac{ss'}{S + S'}$$

nedepinzînd de ordinul k. Deci, aproximarea referitoare la efectul unei zone asupra amplitudinii rezultante în A' : $a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$, este justificată. Amplitudinea luminoasă în A', ca urmare a suprapunerii efectelor a n zone Fresnel, este :

$$a = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \pm a_n = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2} \right) + \ldots \pm$$

$$\pm \frac{a_n}{2} = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_n}{2}$$

Se poate observa că dacă suprafața echifază este neobturată, adică $a_n = 0$, rezultă amplitudinea $a = a_1/2$, jumătate din efectul produs în A' de prima zonă. În cazul plasării în 0 a unei diafragme de rază egală cu cea a primei zone $\rho_1 = [\lambda ss'/(s + s')]^{1}/_{2}$ iluminarea din A' este de 4 ori mai mare decît în absența diafragmei.

Pornind de la observația că toate zonele pare produc în A' oscilații luminoase în opoziție de fază cu oscilațiile produse de zonele impare, s-au confecționat ecrane care obturează fie zonele pare fie cele impare. Aceste ecrane constituie rețele zonate : după cum zona centrală este transparentă sau opacă, rețeaua este pozitivă sau negativă (fig. 9).

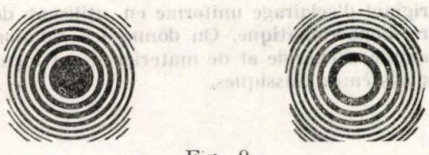


Fig. 9

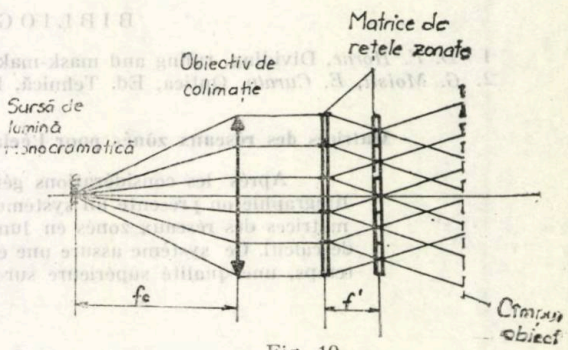


Fig. 10

Aşadar în cazul utilizării unei reţele zonate, calculate pentru distanţele $OA = s$; $OA' = s'$, toate oscilaţiile luminoase produse de reţea ajung în fază în A', rezultînd o iluminare mult mai mare decît în absenţa reţelei zonate. Într-un punct axial oarecare diferit de A', amplitudinea rezultantă este practic nulă, deoarece oscilaţiile luminoase provenind de la reţea prezintă toate fazele posibile; dar, în punctele axiale aflate la o distanţă s' de reţea pentru care raza unei zone Fresnel de ordin impar este egală cu raza primului inel al reţelei se vor obţine maxime ale amplitudinii luminoase:

$$\lambda \cdot \frac{ss'}{s + s'}(2n + 1) = \rho_1^2 \rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{(2n + 1)\lambda}{\rho_1^2} \tag{2}$$

Deci, se poate afirma că o reţea zonată acţionează ca o lentilă cu focare multiple, cu distanţă focală

$$f' = \frac{\rho_1^2}{(2n + 1)\lambda} \tag{3}$$

Observaţie: în relaţia (1) se poate înlocui $ss'/(s + s') = f'$. Considerînd un punct-obiect B în vecinătatea lui A, reţeaua zonată va forma o imagine B' în vecinătatea lui A'.

Într-adevăr variaţiile drumului optic (AMA') sînt foarte mici în raport cu (AOA') la înclinări mici ale reţelei. În domeniul paraxial o reţea zonată formează, deci, imagini ca şi o lentilă.

În fig. 10 este reprezentată schema unui sistem de iluminare folosind matrice de reţele zonate în lumină telecentrică. Prima matrice realizează multiplexarea sursei în planul focal al reţelelor, iar cea de-a doua matrice (care poate lipsi) joacă rol de lentilă de cîmp (concentrează fluxul luminos în cîmpul obiect iluminat). În locul reţelelor circulare pot fi utilizate două reţele zonate paralele încrucişate. Pentru iluminarea uniformă a unor cîmpuri obiect întinse se pot realiza matrice de reţele zonate din bucăţi lipite. Problema randamentului luminos nu se pune $\left(\text{relaţia } a = \frac{a_1}{2} \pm \pm \frac{a_n}{2}\right)$ mai cu seamă cînd se utilizează matrice de reţele paralele încrucişate sau o singură matrice de reţele zonate circulare.

BIBLIOGRAFIE

1. *D. F. Horne*, Dividing, ruling and mask-making, Adam Hilger, London, 1974
2. *G. Moisil, E. Curatu*, Optica, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1986

Matrices des réseaux zônés pour l'éclairage uniforme en microlitographie

Aprés les considérations générales sur les systèmes d'éclairage en microlitographie on présente un système original d'éclairage uniforme en utilisant des matrices des réseaux zonés en lumière monocromatique. On donne les relations de calcul. Ce système assure une économie d'énergie et de materiel et, en même temps, une qualité supérieure sur les systèmes classiques.

C.Z.: 663.63: 629.123

EPURAREA APELOR CU CONȚINUT DE HIDROCARBURI PROVENITE DE LA BORDUL NAVELOR COMERCIALE

D. ROBESCU, T. PETROVICI, SZ. LANYI, ANNE MARIE BEȘLIU, I. CONSTANTINESCU*

În categoria impurificatorilor apelor de suprafață navigabile, o pondere însemnată o au deversările de ape uzate de pe navele comerciale.

În lucrare se prezintă cîteva rezultate obținute de autori pe o instalație de separare a hidrocarburilor din apele de spălare de la bordul navelor, instalație care se bazează pe procedeul flotației prin presurizare cu gaz inert.

Se fac, de asemenea aprecieri asupra rolului important al corelării factorilor chimici și hidrodinamici ai procesului în optimizarea parametrilor funcționali și energetici ai instalației, precum și asupra posibilităților de simulare a fenomenelor din instalație.

1. Introducere

În categoria impurificatorilor apelor de suprafață navigabile o pondere din ce în ce mai însemnată o au deversările de ape uzate de la bordul navelor comerciale. În acest context și ținînd seama de noile standarde în vigoare referitoare la calitatea apelor deversate de la bordul navelor, înzestrarea navelor cu microstații de epurare sau de separare a hidrocarburilor din apele de spălare a devenit o necesitate de prim ordin.

Instalațiile actuale pentru separarea hidrocarburilor din apele de spălare ale tancurilor petroliere au în alcătuirea lor separatoare care funcționează fie pe principiul gravitațional (flotație naturală), fie pe principiul filtrării. Ulterior reziduurile petroliere separate sînt concentrate și evacuate într-un recipient independent. Avînd în vedere bunele rezultate obținute în separarea reziduurilor petroliere provenite din industria petrochimică cu instalații de flotație prin presurizare [3], autorii au conceput și realizat o instalație pentru separarea amestecului apă-hidrocarburi provenit din tancurile de decantare și tancurile de balast murdar înaintea deversării amestecului în mare, în conformitate cu cerințele MARPOL 1973/78, precum și pentru separarea amestecului apă-hidrocarburi din

* Șef lucrări dr. ing.; Cercet. șt. pr., catedra Hidraulică; Șef lucrări dr. ing.; Asist ing.; Prof. dr. ing., catedra Chimie anorganică

tancurile de decantare în timpul spălării cu apă a tancurilor de marfă în circuit închis în scopul obținerii de apă curată pentru spălare.

Flotația este procesul de antrenare a particulelor solide, a uleiurilor sau materialelor organice emulsionate dintr-un lichid la suprafața acestuia cu ajutorul bulelor de gaz. Bazele teoretice ale fenomenului de flotație sînt binecunoscute, iar aplicațiile deosebit de diverse. În funcție de aplicațiile practice ale fenomenului se folosesc diverse procedee de flotație, cum osin : flotația mecanică, flotația prin vacuum, flotația prin presurizare, electroflotația sau flotația prin barbotare. Aceste procedee se deosebesc între ele prin modul de obținere a bulelor de gaz în masa de apă. În domeniul epurării apelor uzate s-a impus în special flotația prin presurizare, folosită mai ales în instalațiile de decantare-flotație ale stațiilor de epurare a apelor uzate provenite din industria petrochimică, [3], [4]. Instalația de flotație prin presurizare folosită de stațiile de epurare ale apelor uzate din industria petrochimică (fig. 1) este alcătuită dintr-un bazin decantor (2) în care se introduce apa uzată prin conducta de admisie (1) și unde se produce fenomenul de flotație cu bule de aer generate prin destinderea apei presurizate în capsulă (8). În capsulă, aerul format de un compresor (10) vine în contact cu apa introdusă de electropompe (5). Debitul recirculat Q_R reprezintă 1/6 ... 1/3 din debitul de apă uzată Q. Cantitatea de aer utilizată la flotație este dată de relația $Q_{af} = C_s(f_p - 1)Q_R Q$ unde C_s reprezintă concentrația la saturație, $f = 0{,}5 \ldots 0{,}8$ (raportul de saturație realizat în vasul de presurizare), $p = 3 \ldots 6$ bar presiunea de lucru.

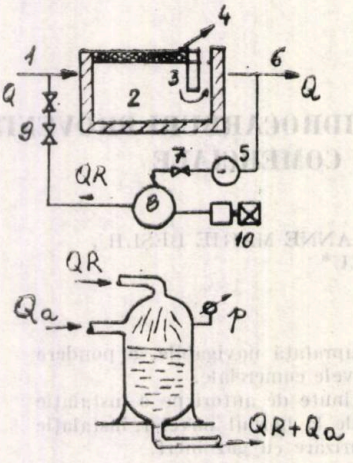


Fig. 1

2. Procedeu și instalație pentru separarea amestecului apă-hidrocarburi din apele reziduale de la bordul navelor comerciale. Model de simulare

Procedeul flotației prin presurizare accelerează procesul de flotație naturală. În acest caz flotația se desfășoară accelerat datorită acțiunii bulelor de gaz cu viteză ascensională superioară vitezelor de ridicare a picăturilor de produs petrolier. Prima variantă (considerată mai economică) folosește instalațiile și compartimentele existente pe navă; instalația utilizează un stop-tanc drept decantor-flotator. În acest compartiment se realizează direct separarea substanțelor grase prin adeziune diferențiată a acestora la nivelul bulelor de gaz. În stop-tanc stratul de reziduuri petroliere este menținut constant prin bulele de aer ascensionale și apa se poate vehicula de mai multe ori, în scopul unei cît mai bune purificări. Instalația se compune din : (fig. 2) a) capsula de presurizare (1); b) generator de gaz inert și tubulatură de legătură cu capsula (2); c) tubulatura

de legătură (3) a capsulei de presurizare cu tancul decantor-flotator; d) tanc de flotație (4); e) tubulatura de legătură (6), (7); pompa de circulație (8) cu tancul de marfă, tancul de flotație și capsula de presurizare.

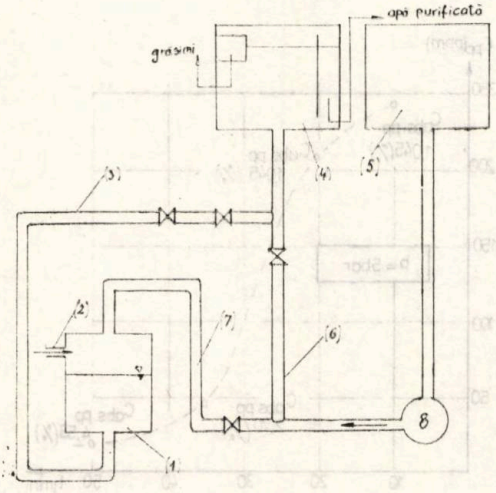


Fig. 2

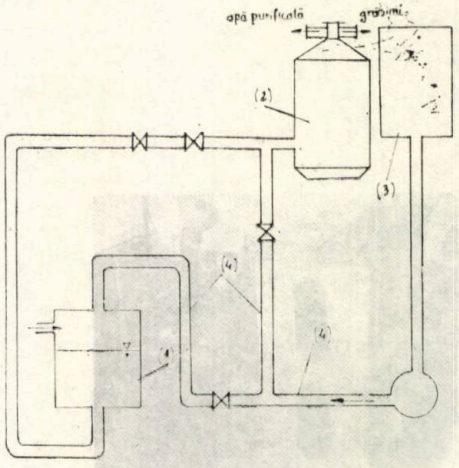


Fig. 3

Sistemul de evacuare a hidrocarburilor separate este alcătuit dintr-un plutitor amplasat la nivelul liber care colectează grăsimile și se evacuează în exterior.

A doua variantă a instalației este alcătuită practic din aceleași elemente.

În acest caz este însă necesară montarea, pe puntea navei a unui recipient ce lucrează cu nivel liber în care se face separarea hidrocarburilor prin flotație. Colectarea și evacuarea grăsimilor separate la suprafața liberă se face automat și independent de oscilațiile navei în marș.

Experimentarea procedeului s-a efectuat pe o instalație model distorsionată geometric, în scopul respectării fenomenului fizic (datorită diferențelor mari de gabarit dintre componentele instalației), (fig. 4).

În timpul testărilor s-a urmărit în principal: a) calibrarea instalației la eficiența maximă prin corelarea factorilor hidrodinamici și chimici; b) urmărirea calității apei separate (din punct de vedere al concentrației de produs petrolier) pentru diferite regimuri de încercări de produs petrolier în gama 1 — 5% (pentru încărcare s-a folosit combustibilul greu pentru motor de navă). S-au efectuat trei seturi de teste corespunzătoare unor concentrații de încărcare de 1,045%, 2,78% și respectiv 4.529% (tabelul 1), (fig. 5).

Pentru fiecare caz în parte au fost determinate debitele prelevate din tancul de reziduuri, de aer, de pe circuitul de presurizare și nivelurile din tancurile de lucru și capsula de presurizare.

În timpul amorsării instalația s-a comportat bine, înregistrînd la ieșire încărcări în produs petrolier cuprinse în gama 254 ppm — 59 ppm.

După amorsare şi calibrare concentraţia de produs petrolier deversat la ieşire între 15 ppm şi 23 ppm, corespunzînd unei eficienţe de separare de peste 99,1% (procedeul de analiză a fost conform cu normele IMCO A 393 (x) şi metodologia clasică [5]).

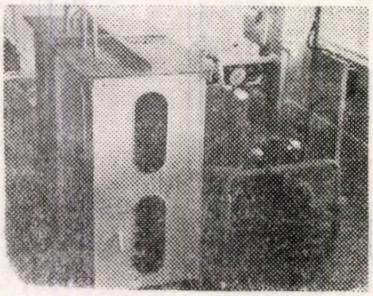


Fig. 4

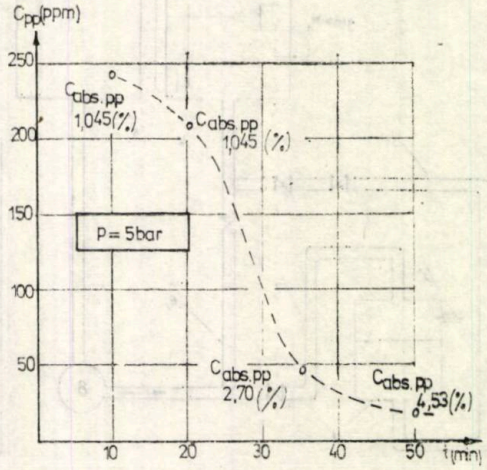


Fig. 5

Dacă se analizează modul de variaţie al concentraţiei produsului petrolier în efluent (apă epurată) rezultă că acesta scade pe măsură ce creşte valoarea raportului $Q_{aer}/Q_{apă}$ recirculată. Acest fapt se explică prin cantitatea mai mare de aer dizolvată în masa de apă presurizată care se degajă în tancul de flotaţie. O cantitate mai mare de aer dizolvată conduce la desfăşurarea cu intensitate mai ridicată a fenomenului de flotaţie.

Pentru simularea fenomenelor din instalaţie şi capsulă, pentru o gamă largă de debite şi incărcări posibile de produs petrolier, a fost pus la punct un model matematic pe baza ecuaţiilor de bilanţ masic. Astfel dacă vom nota cu: V — volumul cuprins în fluxul tehnologic la un moment dat t(flux amorsat) $V = \Sigma Vi$, Vi — volume definite în sensul de mai sus în diverse tronsoane ale instalaţiei; T — perioadă de iteraţie (de control şi citirea datelor simulate); Y — volum afluent într-un ciclu de iteraţie; Q — volum efluent într-un ciclu de iteraţie; VR — volum recirculat într-un ciclu de iteraţie; VG — volum de suspensii flotatoare pe ciclu; VD — volum de suspensii decantate pe ciclu; A — volum afluenţă tratări suplimentare; VC — volum static de retenţie — recirculare capsulă — şi dacă X este unul din parametrii mai sus definiţi, cu QX se va nota calitatea aferentă pe un parametru de calitate. Funcţie de mulţimea datelor hidrodinamice şi chimism furnizate de modelul fizic real sau susceptibile de a fi estimate corect, modelul va fi mai simplu sau mai complex şi anume:

$$QV(I) = (QV(I-1) \times V + QY \times Y + QA \times A + QVR \times VR - QO \times$$

$$\times O - QVC \times VG - QVD \times VD)/(V + Y + A + VR - VG - VO - O)$$

Tabel 1

Teste de funcționare ale instalației de flotație prin presurizare (model de laborator) pentru apă infestată cu combustibil greu motor navă

Nr. test	Presiune de lucru (bar)	Timp de funcționare în regim pînă la prelevarea probelor (min)	Debite pe circuite (m^3/h)			Raport de recirculare Q_r/Q_{apa}	Q_r/Q_{apa}	Concentrația absolută în combustibil greu navă (%)	Caracteristici probe prelevate
			presurizare	aer	recirculare				
1	5	10	9,9	0,1746	27,8 29,2	0,356	159,22	1,045	După separare apa conține 245 ppm p.p. Spuma din tancul flotator conține < 1 % apă.
2	5	16	10,08	0,5652	33,0	0,29	97,36	2,787	După separare apa conține 59 ppm. p.p. Spuma din tancul flotator conține < 1 % apă.
3	5	20	9,9	0,6552	15,5	0,6387	23,65	4,529	După separare apa conține 23 ppm p.p. Spuma din tancul flotator conține < 1 % apă.

și respectiv :

$$QV(\mathrm{I}) = (QV(\mathrm{I}-1) \times V + 0{,}5(QY1 + QY2) \times Y + 0{,}5(QA1 + QA2) \times A + 0{,}5(QVR1 + QVR2) \times VR - 0{,}5(QO1 + QO2) \times O - QVC \times VG - QVD \times VD)/(V + Y + A + VR - VG - VD - O)$$

Dacă volumele devin din diferite motive variabile pe cicluri, atunci ele devin indexate în raport cu I.

Rezultatele obținute prin simulare sînt în bună concordață cu cele obținute pe modelul experimental.

5. Concluzii

Epurarea apelor uzate colectate pe o navă constituie o tematică actuală de o deosebită actualitate și importanță tehnico-economică pentru protecția calității apelor, mai ales cînd este vorba despre ape impurificate cu produs petrolier. Procedeul și instalația pentru separarea hidrocarburilor prin flotație cu gaz din apele de spălare și reziduale ale navelor s-a dovedit deosebit de eficientă. Se poate remarca că instalația răspunde la ieșire cu concentrații de produs petrolier sub 20 ppm chiar la concentrații depășind 5% produs petrolier și că produsul petrolier separat conține o cantitate mică de apă (sub 1%), ceea ce înseamnă că acesta se poate introduce direct în tancul de marfă. Vom remarca de asemenea că pentru instalația de flotație prin presurizare au fost stabilite criterii de similitudine pentru transpunerea rezultatelor la scară naturală [3].

BIBLIOGRAFIE

1. *S. Stoianovici, D. Robescu*, „Procedee și echipamente mecanice pentru tratarea și epurarea apei", Editura tehnică, 1982.
2. *D. Robescu, T. Petrovici, S. Drăgan*, „Modelarea proceselor din instalația de decantare-flotație", Col. Nat. de Mecanica fluidelor, Brașov, 1981.
3. *D. Robescu, T. Petrovici, S. Drăgan*, „Cercetări asupra instalației de flotație prin presurizare utilizată în stațiile de epurare din industria petrochimică", Hidrotehnica, 27 (1982), 9.
4. *D. Robescu, T. Petrovici, D. Stamatoiu*, „Aspecte de modelare matematică a fenomenului de transfer de masă la instalațiile de decantare-flotație folosite la epurarea apelor uzate", Col. de echipamente pentru tratarea și epurarea apelor, București, 1983.
5. Standard Method of Test for Oil Matter in Industrial Waste Water In „Manual on Industrial Water and Industrial Waste Water", Second Edition, 1964, (ASTM Special Technical Publication No. 148 – G).

Technique and Equipment for Wastewater Purification. Results of the Board Ships

The paper presents a technique and equipment for separation of a mixture water-oil products (results of the board ships) using flotation methods with inert gas. Experimental results obtained on a laboratory model, at a reduced scale (prototype at a scale of 1 to 5).

Detalied experimental data will be presented, and analyses of the technique will be made.

The results of this investigations are presented in the paper which also include a detailed discussion.

C.Z. : 66.076

STUDIUL TERMODINAMIC AL GOLIRII RECIPIENȚILOR DE CAPACITATE LIMITATĂ

AL. PETCOVICI*

Golirea unui recipient de capacitate limitată este o problemă întîlnită deseori în tehnică ; ea este abordată prin determinarea debitului de curgere prin orificiul de golire de secțiune constantă.

Modificarea parametrilor gazului conduce la o curgere supracritică în prima fază și subcritică în a doua, faze studiate pe rînd în vederea obținerii ecuațiilor după care se calculează timpul de curgere. Valoarea mică a acestuia și pierderea redusă de căldură prin pereți, determinate printr-un exemplu concret, duc la concluzia că modificarea parametrilor gazului în timpul curgerii poate fi considerată adiabatică.

Deseori în tehnică se întîlnesc situații în care este necesară determinarea timpului de golire sau de umplere cu gaz a unor recipienți cum ar fi butelii de gaz comprimat, instalații chimice, baloane, etc. Problema se poate aborda termodinamic considerînd, pe rînd, cele două situații, golirea și umplerea.

Dacă un recipient în care se găsește gaz comprimat este pus în legătură printr-un orificiu cu mediul ambiant, gazul din recipient va curge afară și acesta se golește. Viteza de curgere a gazului prin orificiu și, deci, și timpul de curgere este variabilă și este funcție de presiunile din recipient și a mediului ambiant și de secțiunea orificiului. Cînd cele două presiuni s-au egalizat, curgerea gazului încetează.

Problema de bază a calculării proceselor gazodinamice de golire a recipienților constă în determinarea variației parametrilor gazului funcție de timp precum și determinarea timpului necesar golirii.

Ecuația de bază folosită în studiul golirii recipienților este ecuația continuității și anume :

$$\dot{M} = A \rho w$$

în care : — A = aria orificiului
— ρ = densitatea gazului
— w = viteza acestuia

Dacă diferența de presiuni dintre recipient și mediu este mică, regimul de curgere a gazului este subcritic și viteza acestuia este dependentă

* Șef lucrări ing., catedra Termotehnică și mașini termice

de raportul presiunilor, p^*, presiunea frînată din recipient și p_a, presiunea mediului ambiant :

$$w = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p^*}{\rho^*} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p^*} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

în care : — p^* = presiunea frînată a gazului din recipient
— ρ^* = densitatea frînată a gazului din recipient
— p_a = presiunea mediului ambiant
— k = exponentul adiabatic al gazului.

Dacă diferența de presiuni este mare, atunci regimul de curgere este supracritic și viteza gazului este constantă și egală cu cea a sunetului :

$$w = w_{cr} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot \frac{p^*}{\rho^*}}$$

Trecerea dintr-un regim de curgere într-altul se face la parametrii critici exprimați prin relația.

$$\left(\frac{p_a}{p^*} \right)_{cr} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Dacă $\frac{p_a}{p^*} < \left(\frac{p_a}{p^*} \right)_{cr}$, atunci regimul de curgere este subcritic, iar dacă $\frac{p_a}{p^*} > \left(\frac{p_a}{p^*} \right)_{cr}$, regimul de curgere este supracritic.

La regimul subcritic presiunea gazului în secțiunea orificiului este egală cu presiunea mediului ambiant, p_a, în timp ce la regimul supracritic presiunea gazului este egală cu cea critică

$$p_{cr} = p^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

fiind mai mare decît p_a (există o discontinuitate a presiunii) și scade odată cu scăderea lui p^*, odată cu curgerea.

Folosind ecuația continuității se obține un debit ce se dovedește a fi cea mai mare decît în realitate. Trebuie ținut cont de rezistențele la curgere care sînt funcție de natura suprafeței peretelui orificiului și de forma acestuia. Se introduce un coeficient de curgere μ subunitar, determinat experimental, care ține cont de influențele amintite.

Pentru o suprafață netedă și o secțiune rotundă, $\mu \cong 1$, iar pentru suprafețe rugoase și secțiuni de alte forme, μ poate scădea pînă la 0,4 ... ... 0,5.

Curgerea poate avea loc foarte rapid și atunci schimbul de căldură între gaz și pereții recipientului se poate neglija, evoluția gazului considerîndu-se adiabatică, presiunea p^* fiind calculată cu relația :

$$p^* = p_i^* \left(\frac{\rho^*}{\rho_i^*} \right)^k$$

unde p_i^* și ρ_i^* sînt parametrii frînați ai gazului din recipient înaintea începerii curgerii (starea inițială — i).

Dacă curgerea este mai lentă și durează mai mult, se ține cont de schimbul de căldură amintit și evoluția gazului se consideră politropică :

$$p^* = p_i^* \left(\frac{\rho^*}{\rho_i^*} \right)^n$$

în care n este exponentul politropic ($1 < n < k$).

Cu relațiile de mai sus se poate obține binecunoscuta ecuație a debitului de curgere prin orificiu în două variante :

a. regim subcritic

$$\dot{M} = \mu A \sqrt{\frac{2k}{k-1} p^* \rho^* \left[\left(\frac{p_a}{p^*} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_a}{p^*} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \tag{1}$$

b. regim supracritic :

$$\dot{M} = \mu A \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot p^* \cdot \rho^*} \tag{2}$$

Ambele ecuații se pot pune sub forma :

$$\dot{M} = \mu A \, \psi \sqrt{p^* \cdot \rho^*} \tag{3}$$

în care ψ este o mărime funcție de raportul $\frac{p_a}{p^*}$ dacă curgerea are loc în regim subcritic și nu este funcție de $\frac{p_a}{p^*}$ dacă curgerea are loc în regim supracritic.

— regim subcritic :

$$\psi = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[\left(\frac{p_a}{p^*} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_a}{p^*} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \tag{4}$$

— regim supracritic :

$$\psi = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2k}{k+1}} = \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \tag{5}$$

Se poate stabili o ecuație diferențială de bilanț masic valabilă la un moment dat. Pentru un interval elementar de timp $d\tau$, din recipient curg $\dot{M} d\tau$ kg gaz. Cum volumul V al recipientului rămîne constant, masa totală a gazului se reduce prin micșorarea densității lui, $— V d\rho^*$ kg gaz.
Deci :

$$\dot{M} \cdot d\tau = -V \cdot d\rho^* \tag{6}$$

Înlocuind mai sus debitul dat de relaţia (3), se obţine :

$$\mu A \psi \sqrt{p^* \rho^*} \cdot d\tau = -V \cdot d\rho^* \tag{7}$$

Considerînd politropică evoluţia gazului :

$$\frac{p^*}{p_i^*} = \left(\frac{\rho^*}{\rho_i^*}\right)^n \tag{8}$$

se explicitează ρ^* şi se introduce în (7) obţinîndu-se pentru $d\tau$:

$$d\tau = -\frac{V}{\mu A \psi n} \cdot \sqrt{\frac{\rho_i^*}{p_i^*}} \cdot \left(\frac{p^*}{p_i^*}\right)^{\frac{1-3n}{2n}} \cdot d\left(\frac{p^*}{p_i^*}\right) \tag{9}$$

Se notează $\frac{p^*}{p_i^*} = \pi$ şi se înlocuieşte în (9) :

$$d\tau = -\frac{V}{\mu A \psi n} \cdot \sqrt{\frac{\rho_i^*}{p_i^*}} \cdot \pi^{\frac{1-3n}{2n}} \cdot d\pi \tag{10}$$

De remarcat este faptul că ecuaţia de mai sus se poate particulariza în două moduri : dacă curgerea este foarte rapidă, evoluţia gazului fiind adiabatică, $n = k$, iar dacă curgerea se face foarte lent, temperatura gazului rămînînd constantă, deci evoluţia lui fiind izotermă, $n = 1$.

De asemenea, ecuaţia (10) se poate integra considerînd diferite cazuri particulare ; în continuare se vor considera constante volumul V al recipientului secţiunea A a orificiului şi presiunea p_a a mediului ambiant.

1. Regimul supracritic

Dacă presiunea mediului ambiant este p_a (de ex. $p_a = 0{,}1$ MPa) atunci presiunea p^* din recipient atinge valoarea critică atunci cînd :

$$(p^*)_{cr} = p_a \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Împărţind cu p_i^* se obţine :

$$\pi_{cr} = \pi_a \cdot \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{11}$$

unde

$$\pi_{cr} = \frac{(p^*)_{cr}}{p_i^*} \quad \text{şi} \quad \pi_a = \frac{p_a}{p_i^*} \tag{11}$$

Apoi, în ecuaţia (10) se înlocuieşte ψ cu valoarea sa supracritică dată de relaţia (5) şi se integrează de la $\pi = 1$ (la momentul iniţial, cînd începe curgerea $p^* = p_i^*$) la π, obţinîndu-se :

$$\tau_{supracr} = \frac{2 \cdot V}{\mu \cdot A \cdot \psi_{supracr}(n-1)} \sqrt{\frac{\rho_i^*}{p_i^*}} \left(\pi^{\frac{1-n}{2n}} - 1\right) \tag{12}$$

Dacă curgerea se face pînă ce p^* devine egal cu $(p^*)_{cr}$, atunci, în ecuația (12) se înlocuiește π cu π_{cr}, obținîndu-se timpul total de curgere supersonică (timpul critic) :

$$\tau_{cr} = \frac{2 \cdot V}{\mu \cdot A \, \psi_{supracr}(n-1)} \cdot \sqrt{\frac{\rho_i^*}{p_i^*}} \left[\pi_a^{\frac{1-n}{2n}} \cdot \left(\frac{k+1}{2} \right)^{-\frac{k(n-1)}{2n(k-1)}} - 1 \right] \quad (13)$$

Se pot obține în continuare, valorile particulare ale lui τ în cazul unei goliri adiabatice sau a uneia izoterme :

a) proces adiabatic : $n = k$

$$\tau_{supracr,ad} = \frac{2 \cdot V}{\mu \cdot A \cdot \psi_{supracr}(k-1) \cdot \sqrt{RT_i^*}} \left(\pi^{\frac{1-k}{2k}} - 1 \right) \quad (14)$$

în care $\frac{\rho_i^*}{p_i^*} = \frac{1}{RT_i^*}$, din ecuația de stare, iar

$$\tau_{cr,ad} = \frac{2V}{\mu A \cdot \psi_{supracr} \cdot (k-1)\sqrt{RT_i^*}} \left[\pi^{-\frac{k-1}{2k}} \cdot \left(\frac{k+1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] \quad (15)$$

Pentru cazul particular al aerului, la care $k = 1,4$, se obțin valorile :

$$\psi_{supracr} = \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} = 0,6847$$

$$\tau_{supracr,ad} = \frac{7,3021 \cdot V}{\mu A \sqrt{RT_i^*}} \left(\pi^{-\frac{1}{7}} - 1 \right) \quad (16)$$

$$\tau_{cr,ad} = \frac{7,3021 \cdot V}{\mu A \sqrt{RT_i^*}} \left(0,9129 \cdot \pi_a^{-\frac{1}{7}} - 1 \right) \quad (17)$$

Aplicație numerică

Într-un recipient de $V = 4$ m^3 se găsește aer la $p_i^* = 1$ MPa și $T_i^* = 300$ K. În peretele rezervorului este practicat un orificiu cu diametrul de 10 mm prin care aerul curge în mediul ambiant. Se consideră $\mu = 0,95$.

$$\pi_a = \frac{p_a}{p_i^*} = \frac{1}{10}$$

și cu expresia (17) se obține $\tau_{cr,ad} = 358,36$ s

b) proces izoterm : $n = 1$

Se înlocuiește $n = 1$ în ecuația (10) și apoi se integrează ecuația obținîndu-se :

$$\tau_{supracr,izot} = \frac{V}{\mu A \, \psi_{supracr} \sqrt{RT_i^*}} \ln \frac{1}{\pi} \quad (18)$$

și

$$\tau_{cr,izot} = \frac{V}{\mu A \psi_{supracr} \sqrt{RT_i^*}} \ln \frac{1}{\pi_a \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}} \tag{19}$$

Pentru cazul particular al aerului la care $k = 1,4$ se obțin relațiile :

$$\tau_{supracr,izot} = \frac{1,4604 \cdot V}{\mu A \sqrt{RT_i^*}} \ln \frac{1}{\pi} \tag{20}$$

$$\tau_{cr,izot} = \frac{1,4604\ V}{\mu A \sqrt{RT_i^*}} \left(\ln \frac{1}{\pi_a} - 0,6381\right) \tag{21}$$

Pentru aplicația numerică, înlocuind în relația (21) se obține $\tau_{cr,izot} = 444,36$ s.

2. Regimul subcritic

Se exprimă, mai întîi, ψ_{subcr}, în mărimi adimensionale :

$$\frac{p_a}{p^*} = \frac{p_a}{p_i^*} \cdot \frac{p_i^*}{p^*} = \frac{\pi_a}{\pi}$$

și ψ_{subcr} devine :

$$\psi_{subcr} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\left[\left(\frac{\pi_a}{\pi}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{\pi_a}{\pi}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}$$

Înlocuind în relația (10), se obține :

$$d\tau = -\frac{V}{\mu A n \cdot \pi_a^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \sqrt{RT_i^*}} \cdot \frac{\pi^{\frac{k+n-2kn}{2kn}}}{\left(\pi^{\frac{k-1}{k}} - \pi_a^{\frac{k-1}{k}}\right)^{\frac{1}{2}}} d\pi \tag{22}$$

integrarea ecuației (22) se face dela π_{cr} la un π oarecare ($\pi < \pi_{cr}$), iar dacă este necesară determinarea timpului integral de curgere subcritică, atunci integrarea se face pînă la π_a, la care $p^* = p_a$ și curgerea încetează. Se obține :

$$\tau_{subcr} = -\frac{V}{\mu A n \pi_a^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \sqrt{RT_i^*}} \int_{\pi_{cr}}^{\pi} \frac{\pi^{\frac{k+n-2kn}{2kn}}}{\left(\pi^{\frac{k-1}{k}} - \pi_a^{\frac{k-1}{k}}\right)^{\frac{1}{2}}} d\pi \tag{23}$$

Integrala se poate rezolva pentru orice k și orice n prin diferite metode numerice ; în continuare ea se va rezolva în cele două cazuri particulare amintite, proces adiabatic și proces izoterm.

a) proces adiabatic : $n = k = 1{,}4$

Integrala devine :

$$I = \int_{\pi_{cr}}^{\pi} \frac{\pi^{\frac{k+n-2kn}{2kn}}}{(\pi^{\frac{k-1}{k}} - \pi_a^{\frac{k-1}{k}})^{\frac{1}{2}}} \, d\pi = \int_{\pi_{cr}}^{\pi} \frac{\pi^{-\frac{2}{7}}}{(\pi^{\frac{2}{7}} - \pi_a^{\frac{2}{7}})^{\frac{1}{2}}} \, d\pi$$

și se rezolvă cu substituția $\pi^{\frac{2}{7}} = \frac{\pi_a^{\frac{2}{7}}}{1 - x^2}$, devenind :

$$I = -7 \cdot \pi_a^{\frac{4}{7}} \left[\frac{3(1-y)^{\frac{3}{2}} - 5(1-y)^{\frac{1}{2}}}{8y^2} - \frac{3}{16} \ln \frac{1 + \sqrt{1-y}}{1 - \sqrt{1-y}} + 0{,}4932 \right]$$

în care s-a ținut cont de relația (11) și în care $y = \left(\frac{\pi_a}{\pi}\right)^{\frac{2}{7}}$

Se obține :

$$\tau_{subcr,ad} = \frac{1{,}8898 \cdot V}{\mu A \, \pi_a^{\frac{1}{7}} \sqrt{RT_i^*}} \left[\frac{3(1-y)^{\frac{3}{2}} - 5(1-y)^{\frac{1}{2}}}{8y^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{16} \ln \frac{1 + \sqrt{1-y}}{1 - \sqrt{1-y}} + 0{,}4932 \right] \qquad (24)$$

Timpul maxim de curgere subcritică se obține pentru $y = 1 (\pi = \pi_a)$

$$\tau_{subcr,max,ad} = \frac{0{,}9321 \cdot V}{\mu A \, \pi_a^{\frac{1}{7}} \sqrt{RT_i^*}} \qquad (25)$$

Pentru aplicația numerică se obține $\tau_{subcr,max,ad} = 236{,}76$ s

b) proces izoterm : $n = 1$; $k = 1{,}4$

Integrala devine :

$$I = \int_{\pi_{cr}}^{\pi} \frac{\pi^{\frac{k+n-2kn}{2kn}}}{(\pi^{\frac{k-1}{k}} - \pi_a^{\frac{k-1}{k}})^{\frac{1}{2}}} \, d\pi = \int_{\pi_{cr}}^{\pi} \frac{\pi^{-\frac{1}{7}}}{(\pi^{\frac{2}{7}} - \pi_a^{\frac{2}{7}})^{\frac{1}{2}}} \, d\pi$$

și se rezolvă cu substituția $\pi^{\frac{2}{7}} - \pi_a^{\frac{2}{7}} = x^2$, devenind :

$$I = -7 \cdot \pi_a^{\frac{5}{7}} \left\{ 0{,}5104 - \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{y} - 1\right) + 1 \right] \right\}$$

în care s-a ținut cont de relația (11) și în care $y = \left(\frac{\pi_a}{\pi}\right)^{\frac{2}{7}}$

Se obţine :

$$\tau_{subcr,izot} = \frac{2{,}6458 \cdot V}{\mu A \sqrt{RT_i^*}} \left\{0{,}5104 - \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{y} - 1\right) + 1\right]\right\} \tag{26}$$

Timpul maxim de curgere subcritică se obţine pentru $y = 1$ ($\pi = \pi_a$)

$$\tau_{subcr,\,max,izot} = \frac{1{,}3504\ V}{\mu A \sqrt{RT_i^*}} \tag{27}$$

Pentru aplicaţia numerică se obţine $\tau_{subcr,max,izot} = 246{,}86$ s

Timpul total de golire al recipientului se obţine, evident, prin însumarea timpilor τ_{cr} şi $\tau_{subcr,max}$.

a) proces adiabatic ($k = 1{,}4$) :

$$\tau_{tot,ad} = \tau_{cr,ad} + \tau_{subcr,max,ad} = \frac{7{,}3021\ V}{\mu A \sqrt{RT_i^*}} (1{,}0405 \cdot \pi_a^{-\frac{1}{7}} - 1) \tag{28}$$

ceea ce dă pentru aplicaţia numerică $\tau_{tot,ad} = 505{,}03$ s foarte apropiat de cel obţinut prin însumare (595,12 s)

b) proces izoterm :

$$\tau_{tot,izot} = \tau_{cr,izot} + \tau_{subcr,max,izot} = \frac{1{,}4604\ V}{\mu A \sqrt{RT_i^*}} (0{,}2866 - \ln \pi_a) \tag{29}$$

ceea ce dă pentru aplicaţia numerică : $\tau_{tot,izot} = 691{,}22$ s egal cu cel obţinut prin însumare.

Diferenţa dintre $\tau_{tot.ad}$ şi $\tau_{tot.izot}$ fiind mică se poate considera curgerea ca fiind adiabatică. Dar cu ce eroare ? Ce cantitate de căldură se pierde în mediul ambiant din recipient în realitate ?

Se consideră că transferul de căldură prin pereţii recipientului se face instantaneu, rezistenţa termică a metalului fiind foarte mică şi se consideră gazul din interior un corp cilindric cu rezistenţă termică internă şi de suprafaţă finită.

Cantitatea de căldură pierdută în exterior în regim tranzitoriu pe unitatea de lungime a cilindrului în timpul τ[s] va fi :

$$\frac{\Delta Q}{t_0 - t_f} = \frac{4\pi\lambda R^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \cdot \frac{J_1^2(\beta_n)}{J_0^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)} \left[1 - e^{-\left\{\frac{\beta_n}{R}\right\}^2 a\tau}\right] [J/\text{m}\cdot\text{K}]$$

în care
- t_0 = temperatura iniţială a corpului [°C]
- t_f = temperatura constantă a mediului ambiant [°C]
- λ = conductivitatea termică a gazului [W/m.K]
- a = difuzivitatea termică a gazului [m²/s]
- R = raza cilindrului [m]
- J_0, J_1 = funcţii Bessel de speţa întîi, ordinul zero, respectiv unu

— β_n = rădăcini ale ecuației transcendente $\beta_n = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda} \cdot \frac{J_0(\beta_n)}{J_1(\beta_n)}$

— α = coeficientul de convecție între peretele recipientului și mediul ambiant [W/m².K]

Calculul se face în cazul concret al aplicației numerice de mai sus, considerînd recipientul de volum $V = 4$ m³ ca fiind un cilindru cu $R = 0{,}5$ m și, deci, înălțimea $h = 5{,}09$ m, iar $\alpha = 6$ W/m².K.

Pentru a reliefa influența pe care o are valoarea temperaturii inițiale T_i^* a aerului din recipient, calculul se face pentru diferite valori ale acesteia și anume 300K, 350 K, 400 K, 450 K și 500 K.

Pentru $T_i^* = 300$ K ($t_0 = 27$°C) și $T_a = 273$ K($t_f = 0$°C) se obțin cinci rădăcini ale ecuației transcendente amintite, prezentate împreună cu valorile funcțiilor Bessel J_0 și J_1 în tabelul 1 :

Tabelul 1

β_n	J_0	J_1
2,38	0,012954	0,524402
5,47	−0,017110	−0,342951
8,58	0,020081	0,273043
11,69	−0,023664	−0,233275
14,80	0,027082	0,206596

Cu ajutorul acestora se obține $\Delta Q = 21{,}44$ kJ/m și, pentru tot cilindrul : $Q_t = 109{,}1$ kJ.

Conținutul de căldură inițial (energia internă) este $U = 9955{,}2$ kJ.

Pierderea de căldură reprezintă $\varepsilon = 1{,}1\%$ din conținutul de căldură inițial.

În tabelul 2 sînt prezentate sintetic datele obținute pentru toate valorile considerate ale temperaturii T_i^*.

Tabelul 2

T_i (K)	τ (s)	Q_t (kJ)	U (kJ)	ε (%)
300	595,03	109,10	9955,2	1,10
350	550,59	314,28	10044,8	3,13
400	515,03	521,94	10054,75	5,19
450	485,58	731,54	10166,75	7,20
500	460,66	938,37	10278,75	9,13

Calculele de mai sus se pot relua căutînd şi influenţa presiunii iniţiale din recipient, p_i^*.

În tabelele 3 şi 4 ca şi în figura 1 sînt prezentate sintetic şi aceste rezultate, întîi pentru $T_i^* = 300$ K şi, apoi, pentru $T_i^* = 400$ K.

Tabelul 3

$T_i^* = 300$ K

p_i^* (MPa)	τ (s)	Q_t (kJ)	U (kJ)	ε (%)
0,5	412,87	70,64	5003,5	1,41
1	595,03	109,10	9955,2	1,10
1,5	709,73	135,18	15010,68	0,90
2	795,48	155,40	20014,20	0,78

Tabelul 4

$T_i^* = 400$ K

p_i^* (MPa)	τ (s)	Q_t (kJ)	U (kJ)	ε (%)
0,5	357,55	332,13	5038,33	6,59
1	515,03	521,94	10054,75	5,19
1,5	614,65	655,53	15114,52	4,34
2	688,90	759,74	20152,69	3,77

Se poate căuta şi influenţa pe care o are raza recipientului asupra pierderii de căldură.

În tabelul 5 sînt prezentate rezultatele calculelor pentru acelaşi recipient de 4 m^3, dar de rază variabilă pentru $p_i^* = 1$ MPa şi $T_i^* = 300$ K.

Tabelul 5

R (m)	τ (s)	Q_t (kJ)	U (kJ)	ε (%)
0,25	595,03	292,77	9955,2	2,94
0,5	595,03	109,10	9955,2	1,10
1	595,03	32,00	9955,2	0,32

Din datele prezentate rezultă că timpul de curgere scade cu creşterea temperaturii T_i^* şi creşte cu creşterea presiunii p_i^*, în timp ce pier-

derea de căldură crește cu creșterea temperaturii T_i^* și scade cu creșterea presiunii p_i^* și cu creșterea razei recipientului.

În toate expresiile timpului de curgere, acesta este direct proporțional cu volumul recipientului; în figura 2 este prezentată dependența timpului τ de temperatura T_i^* pentru un recipient de numai 1 m^3.

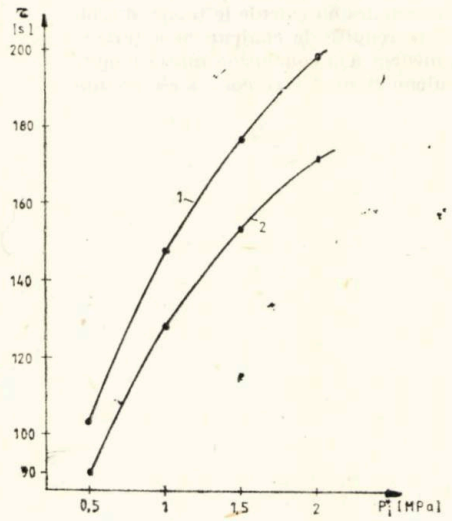


Fig.1 — Dependența timpului τ funcție de presiunea p_i^* la diferite valori ale tenperaturii T_i^*, pentru un recipient avînd $V = 1$ m^3 ($1 - T_i^* = 300$K; $2 - T_i^* = 400$ K)

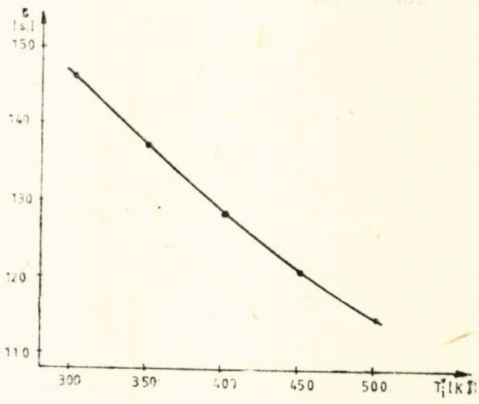


Fig.2 — Dependența timpului τ funcție de tempera tura T_i^* pentru un recipient avînd $V = 1$ m^3

Concluzia care se poate trage în urma tuturor datelor prezentate este că, pentru recipienți mai mici și pentru recipienți mai mari dar și cu rază mai mare avînd în interior gaz cu presiuni ridicate și cu temperaturi moderate se poate considera că procesul de golire decurge adiabatic, eroarea introdusă fiind absolut acceptabilă.

BIBLIOGRAFIE

1. *V. Pimsner, C. A. Vasilescu, A. Petcovici*, Termodinamică tehnică-culegere de probleme, E.D.P., București, 1982.
2. *V. Pimsner, C. A. Vasilescu, G. A. Rădulescu*, Energetica turbomotoarelor cu ardere internă, Ed. Academiei, București, 1964.
3. *S. Petrescu, V. Petrescu*, Principiile termodinamicii, Ed. Tehnică, București, 1983.
4. *V. Radcenco ș.a.*, Calculul și proiectarea elementelor și schemelor pneumatice de automatizare, Ed. Tehnică, București, 1985.

L'étude thermodynamique de l'évacuation des recipients de capacité limitée

L'évacuation d'un recipient de capacité limitée est un problème rencontré souvent en technique ; elle est abordée par la détermination du débit d'écoulement par l'orifice d'évacuation d'une section constante.

La modification des paramètres du gaz mène à un écoulement supersonique dans la première phase et subsonique dans la deuxième, phases étudiées tour à tour afin d'obtenir les équations avec lesquelles on calcule le temps d'écoulement. La valeur petite du celui-ci et la perte réduite de chaleur en extérieur, déterminées à la base d'un exemple concret, mènent à la conclusion que la modification des paramètres du gaz pendant l'écoulement peut être considérée comme adiabatique.

C.Z.: 517.9:621.316

PROGRAM PENTRU CALCULUL TURAȚIILOR CRITICE ALE ROTORILOR PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE

I. PĂRĂUȘANU*

În lucrare se prezintă cîteva dintre aspectele teoretice ce au stat la baza obținerii, prin metoda elementelor finite, a matricelor caracteristice corespunzătoare rotorilor de secțiune constantă pe porțiuni, precum și unele particularități ale programului de calcul realizat. Lucrarea cuprinde modul de verificare al programului de calcul, prin recalcularea rezultatelor obținute de alți autori pentru cazuri bine cunoscute din literatura de specialitate, alături de alte exemple numerice.

1. Introducere

Procedeele de calcul dinamic ale sistemului rotor-lagăr au fost dezvoltate cu precădere de către Prohl [1], Myklestad [2], Lund [3], Tang[4], Koening [5] și s-au bazat în general pe metoda matricelor de transfer.

Pentru înțelegerea comportării dinamice a mașinilor cu rotor este necesar să se obțină informații în legătură cu următoarele aspecte, caracteristice acestui tip de mașini: a) turații critice — efectul rigidității lagărelor și al amortizării asupra vitezelor critice existente în plaja turațiilor de interes; b) răspunsul la dezechilibru — amplitudinea răspunsului dinamic al unui rotor la o anumită distribuție a dezechilibrului rezidual; c) stabilitate — determinarea turațiilor de apariție a fenomenului de instabilitate a mișcării în lagăr; d) frecvențe critice torsionale — determinarea lor în zona turațiilor de interes; e) echilibrare — localizarea punctelor de amplasare a anumitor mase în scopul reducerii vibrațiilor rotorilor rigizi și elastici.

Lucrarea de față tratează doar primul aspect, cel al determinării turațiilor critice și a formei modurilor proprii de vibrație ale rotorilor de secțiune constantă pe porțiuni, programul de calcul realizat fiind de fapt un subprogram al unui program complex, ce va rezolva aproape toate aspectele menționate mai sus și care va constitui obiectul unor articole viitoare.

Există programe de calcul dinamic al rotorilor, ca de exemplu: ROTDYN, LINK III, CADENSE 20, NASA, GIBERSON, majoritatea

* Asist. ing., catedra Rezistența materialelor

dintre ele considerînd masa arborelui concentrată în nodurile elementelor componente în care se subdivide rotorul, excepție făcînd programul ROTDYN, formulat pe baza metodei elementelor finite. In tabelul 1 se prezintă principalele caracteristici ale programelor ROTDYN, LINK III și CADENSE 20, comparativ cu programul ROTOR, realizat de autor.

Programul de calcul realizat prezintă avantajele unui program conversațional, este ușor de utilizat (implementarea s-a făcut pe un microcalculator tip HC-85) și poate constitui un instrument util pentru inginerii proiectanți în cunoașterea încă din primele faze ale proiectării a turațiilor critice și a formei modurilor proprii de vibrație ale rotorilor.

2. Aspecte teoretice

Fie ecuațiile de mișcare ale unui sistem, cu un număr finit de grade de libertate, exprimat sub formă matriceală [6]:

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = \{Q\}, \tag{1}$$

în care $[M]$ este matricea consistentă de masă a întregii structuri, $[K]$, matricea globală a rigidității structurii, $\{D\}$, vectorul deplasărilor, iar $\{Q\}$, vectorul forțelor nodale.

În cazul vibrațiilor libere $\{Q\} = 0$, relația (1) devenind

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = 0 \tag{2}$$

În ipoteza că răspunsul dinamic are formă armonică,

$$\{D\} = \{\bar{D}\}(\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t), \tag{3}$$

ecuația (2) devine:

$$([K] - \omega^2[M])\{\bar{D}\} = 0, \tag{4}$$

în care $\{\bar{D}\}$ reprezintă vectorul amplitudinilor deplasărilor armonice $\{D\}$. Sistemul ecuațiilor omogene (4) are o soluție nebanală dacă, și numai dacă, determinantul matricei coeficienților are valoarea zero, adică:

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \tag{5}$$

Valoarea proprie ω_i^2 și vectorul propriu corespunzător $\{\bar{D}_i\}$, unde $i = 1, \ldots, n$ (n — ordinul matricelor $[K]$ și $[M]$) sînt cele două caracteristici fundamentale determinate în analiza vibrațiilor libere. Fiecare pereche caracteristică $(\omega_i^2, \{\bar{D}_i\})$ satisface ecuația matriceală (4), respectiv

$$[K]\{\bar{D}_i\} = \lambda_i[M]\{\bar{D}_i\}, \tag{6}$$

în care s-a notat $\lambda_i = \omega_i^2$, $i = 1, \ldots, n$.

Tabelul 1

Programul / Caracteristici	Rotdyn	Link III	Cadense 20	Rotor
Realizat	Franklin Institute Research Laboratories Philadelphia	Comcode Corp. Alexandria	Mechanical Technology Inc. Latham	Institutul Politehnic București Cat. Rez. mat.
Limbaj	Fortran	Fortran	Fortran	Basic
Formulare	element finit	masă distribuită	masă distribuită	element finit
Efectul forței tăietoare	DA	DA	DA	DA
Efectul încovoierii	DA	DA	DA	DA
Efectul giroscopic — arbore — disc	NU DA	DA DA	DA DA	NU NU
Număr posibil de turații critice	nelimitat	nelimitat	nelimitat	nelimitat
Orbită circulară	NU	NU neapărat	DA	NU
Număr maxim de elemente	400	nelimitat	200	nelimitat
Număr maxim de lagăre	15	nelimitat	50	nelimitat
Tipul lagărului	Opțional	Opțional	Opțional	Opțional
Lagăr liniar/neliniar	liniar	liniar	liniar	liniar
Coeficienți de rigiditate- — lagăr	Kxx Kyy	Kxx Kyy	K-efectiv	Kxx Kyy
Coeficienți de amortizare	NU	NU	NU	NU
Mase concentrate	DA	DA	DA	DA
Momente de inerție concentrate	DA	DA	DA	DA

Matricele caracteristice ale elementului finit

Se consideră sistemul drept de axe XYZ astfel încît axa X să coincidă cu axa arborelui aflat în mişcare de rotaţie şi se notează cu u, v, w, şi θ, ψ, φ, deplasările, respectiv rotirile faţă de cele trei axe. Fie elementul finit i obţinut în urma discretizării arborelui, mărginit de nodurile i, respectiv $i+1$ şi caracterizat prin lungimea l_i, aria A_i, rigiditatea la încovoiere EI_i şi densitatea ρ(fig. 1). Se observă că

$$\dot{\theta}_i = \dot{\theta}_{i+1} = \omega\,, \tag{7}$$

unde ω reprezintă viteza unghiulară a arborelui, şi totodată că

$$u_i = u_{i+1} = 0, \tag{8}$$

rezultînd deci patru grade de libertate pentru fiecare nod, respectiv opt grade de libertate pentru element.

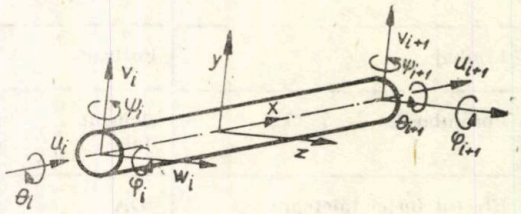


Fig. 1

Să considerăm arborele din figura 2, discretizat în NE număr de elemente de secţiune constantă. Numărul maxim de noduri, obţinute în urma discretizării, este $NN = NE + 1$. Ţinînd cont că există patru grade

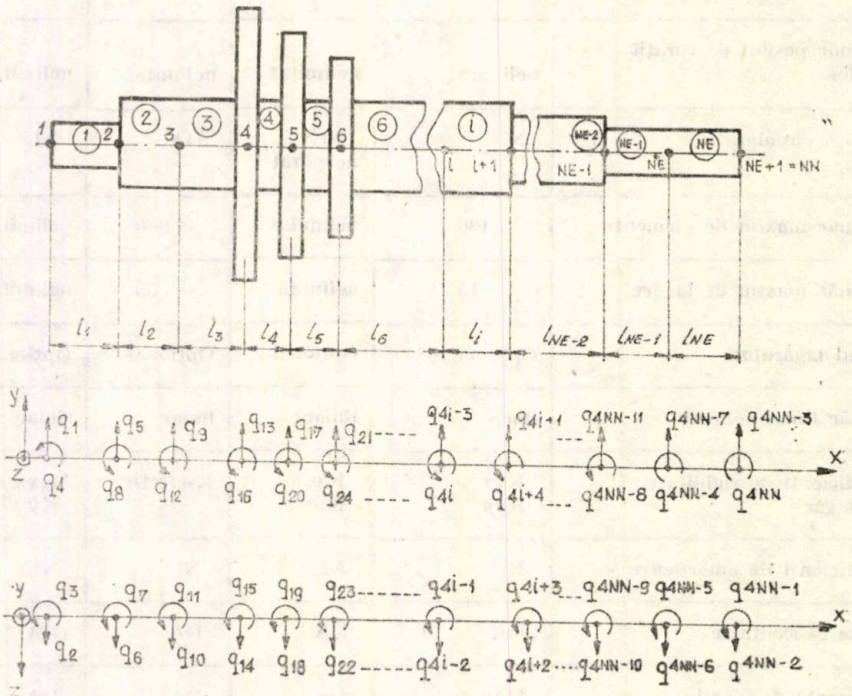


Fig. 2

de libertate pentru fiecare nod i, $i = 1, \ldots, NN$, și notînd pentru nodul i cu $q_{4i-3} = v_i$, $q_{4i-2} = w_i$, $q_{4i-1} = \psi_i$, iar cu $q_{4i} = \varphi_i$ (fig. 2), unde v_i, w_i, ψ_i, φ_i, reprezintă amplitudinile maxime ale deplasărilor, respectiv ale rotirilor nodului i față de axele Y și Z, rezultă vectorul

$$\{\bar{D}\} = \{q_1, q_2, \ldots, q_{4NN}\}^T, \tag{9}$$

ce constituie vectorul necunoscutelor din ecuația matriceală (6).

Regula de semne utilizată pentru deplasări, rotiri, forțe tăietoare și momente este prezentată în figura 3, sensurile marcate în desen corespunzînd sensurilor pozitive.

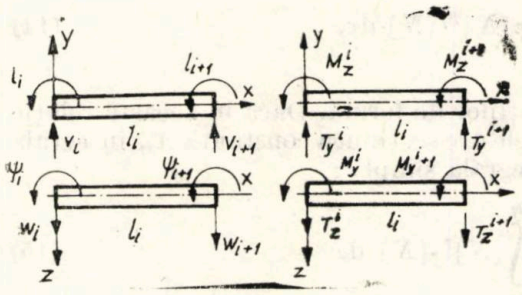


Fig. 3

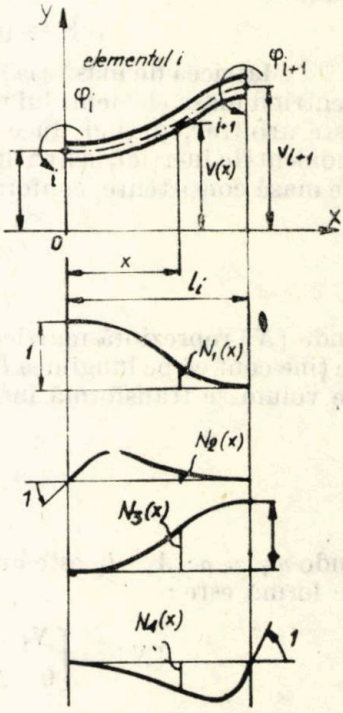


Fig. 4

Pentru determinarea matricei $[N]$ a funcțiilor de formă, necesară calculării matricelor caracteristice [6], s-au folosit funcții de tip Hermite [7]

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, \quad N_3(x) = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3,$$

$$N_2(x) = \frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3, \quad N_4(x) = -\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3. \tag{10}$$

astfel încît, considerînd elementul i și planul XOY (fig. 4), deplasarea pe direcția Y a secțiunii rotorului aflată la distanța x de nodul i este :

$$v(x) = N_1(x) \cdot v_i + N_2(x)\, l_i \varphi_i + N_3(x)\, v_{i+1} + N_4(x) \cdot l_i \cdot \varphi_{i+1} \tag{11}$$

Procedînd analog și pentru planul XOZ, se poate scrie apoi următoarea relație matriceală pentru elementul i între deplasările secțiunii aflate la distanța x de nodul i și deformațiile (deplasările și rotirile) secțiunilor i și $i+1$:

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \{u\}_i \tag{12}$$

unde

$$\{u\}_i = \{v_i\ w_i\ \psi_i\ \varphi_i\ v_{i+1}\ w_{i+1}\ \psi_{i+1}\ \varphi_{i+1}\}^T \tag{13}$$

Matricea de masă $[m]$ a elementului finit se poate obține fie : a) concentrînd masa elementului în noduri, $[m]$ este de formă diagonală, procesul este arbitrar, putînd duce (masele concentrate fiind mase „pure", fără moment de inerție), la apariția matricelor singulare ; fie, b) formînd matrice de masă consistente, conform relației [6, 7] :

$$[m] = \int_V \rho [N]^T \cdot [N] \cdot \mathrm{d}v, \tag{14}$$

unde $[N]$ reprezintă matricea funcțiilor de formă. Dacă în această relație se ține cont că pe lungimea l_i arborele are secțiunea constantă A_i, integrala pe volum se transformă într-o integrală simplă :

$$[m]_i = m_i \int_0^{l_i} [N]^T \cdot [N] \cdot \mathrm{d}x \tag{15}$$

unde $m_i = \rho \cdot A_i \cdot l_i$ este masa elementului i, iar matricea $[N]$ a funcțiilor de formă este :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Efectuînd integrala din relația (15) termen cu termen, se obține matricea de inerție pentru un element de secțiune constantă de forma :

$$[m]_i = \frac{\rho \cdot A_i \cdot l_i}{420} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 156 & 0 & 0 & 22l_i & 54 & 0 & 0 & -13l_i \\ \hline 0 & 156 & -22l_i & 0 & 0 & 54 & 13l_i & 0 \\ \hline 0 & -22l_i & 4l_i & 0 & 0 & -13l_i & -3l_i^2 & 0 \\ \hline 22l_i & 0 & 0 & 4l_i^2 & 13l_i & 0 & 0 & -3l_i^2 \\ \hline 54 & 0 & 0 & 13l_i & 156 & 0 & 0 & -22l_i^2 \\ \hline 0 & 54 & -13l_i & 0 & 0 & 156 & 22l_i & 0 \\ \hline 0 & 13l_i & -3l_i^2 & 0 & 0 & 22l_i & 4l_i^2 & 0 \\ \hline -13l_i & 0 & 0 & -3l_i^2 & -22l_i^2 & 0 & 0 & 4l_i^2 \end{array}\right] \tag{17}$$

Dacă din potențialul total Π al unui sistem elastic reținem doar termenii corespunzători energiei potențiale de deformație U și renunțăm la potențialul forțelor exterioare [6], rezultă :

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T \int_V [B]^T \cdot [E] \cdot [B] \cdot dv \cdot \{d\}, \tag{18}$$

unde $[B]$ reprezintă matricea funcțiilor de formă, iar pentru elementul de arbore considerat

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} \tag{19}$$

În cazul elementului de arbore de secțiune constantă, energia potențială de deformație U se mai poate scrie și sub forma :

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{Bmatrix} v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{Bmatrix} v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} \right] \cdot dx \tag{20}$$

pentru că rigiditatea la încovoiere EI este constantă. Deci, așa cum se observă din relația (20), matricea $[B]$, a funcțiilor de formă, este construită cu aceleași funcții de interpolare ca și matricea $[N]$, însă derivate de două ori în raport cu x. Se obține astfel

$$[B] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[N] = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & B_2 & B_3 & 0 & 0 & B_4 \\ 0 & B_1 & B_2 & 0 & 0 & B_3 & B_4 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

unde

$$B_1(x) = \frac{2}{l^2}\left(-3 + 6\frac{x}{l}\right), \quad B_3(x) = \frac{2}{l^2}\left(3 - 6\frac{x}{l}\right),$$

$$B_2(x) = \frac{2}{l^2}\left(-2 + 3\frac{x}{l}\right), \quad B_4(x) = \frac{2}{l^2}\left(-1 + 3\frac{x}{l}\right). \tag{22}$$

Cunoscînd matricea $[B]$ a funcțiilor de formă se poate calcula matricea de rigiditate a elementului, efectuînd integralele termen cu termen în relația :

$$[k] = EI \int_0^l [B]^T \cdot [B] \cdot dx \tag{23}$$

și se obține astfel pentru elementul i :

$$[k]_i = \frac{EI_i}{l_i^3}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6l_i & -12 & 0 & 0 & 6l_i \\ 0 & 12 & -6l_i & 0 & 0 & -12 & -6l_i & 0 \\ 0 & -6l_i & 4l_i^2 & 0 & 0 & 6l_i & 2l_i^2 & 0 \\ 6l_i & 0 & 0 & 4l_i^2 & -6l_i & 0 & 0 & 2l_i^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6l_i & 12 & 0 & 0 & -6l_i \\ 0 & -12 & 6l_i & 0 & 0 & 12 & 6l_i & 0 \\ 0 & -6l_i & 2l_i^2 & 0 & 0 & 6l_i & 4l_i^2 & 0 \\ 6l_i & 0 & 0 & 2l_i^2 & -6l_i & 0 & 0 & 4l_i^2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Matricele $[m]_i$ și $[k]_i$ sînt simetrice. Dacă notăm cu

$$\{F\}_i = \{T_y^i \; T_z^i \; M_y^i \; M_z^i \; T_y^{i+1} \; T_z^{i+1} \; M_y^{i+1} \; M_z^{i+1}\}^T \tag{25}$$

vectorul eforturilor din nodurile i și $i+1$, pentru elementul i se poate scrie :

$$([k]_i - \omega^2[m]_i)\,\{u\}_i = \{F\}_i \tag{26}$$

În cazul vibrațiilor libere $\{F\}_i = 0$ și însumînd (26) pentru toate elementele rezultă relația (4) în care

$$K = \sum_{i=1}^{NE} [k]_i \tag{27}$$

$$M = \sum_{i=1}^{NE} [m]_i \tag{28}$$

iar

$$\{\bar{D}\} = \{\{u\}_1^T \; \{u\}_2^T \; \{u\}_3^T \ldots \{u\}_{NE+1}^T\}^T \tag{29}$$

și corespunde vectorului din relația (9) ; s-a notat cu $\{u\}_i = \{v_i \, w_i \, \psi_i \, \varphi_i\}^T$, $i = 1, \ldots, NE+1$. S-a ajuns astfel la ecuația matriceală (6) a cărei rezolvare conduce la aflarea valorilor proprii și a vectorilor proprii corespunzători.

3. Programul de calcul ROTOR

Principalele caracteristici ale programului de calcul realizat sînt trecute în tabelul 1, implementarea sa făcîndu-se pe un microcalculator tip HC-85 și prezentînd avantajele unui program conversațional. Încărcarea programului durează 1'20'' și ocupă 17K în memoria calculatorului.

Pentru rulare sînt necesare următoarele date de intrare :

a. Date generale (număr de elemente, modul de elasticitate, densitate).

b. Date privind elementele (aria secțiunii, lungimea elementului).

c. Date privind masele și momentele de inerție concentrate (valoarea și nodul de aplicare).

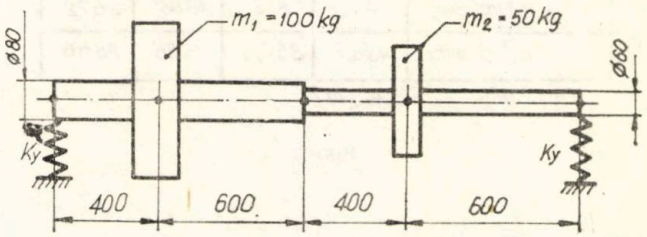
d. Date despre lagăre (număr, nod de acțiune, valoarea constantelor elastice pe direcția Y și Z).

Programul nu furnizează toate valorile proprii, ci numai pe cele cuprinse în intervalul de interes, definit de către utilizator. Pentru rezolvarea problemei de valori proprii s-au folosit subrutinele REDUC, TRED 1, BISECT, TINVIT, TRBAK și REBAK [8].

4. Exemple numerice

Verificarea programului de calcul realizat s-a făcut prin recalcularea rezultatelor obținute de către alți autori și publicate în literatura de specialitate.

Un prim exemplu de verificare este cel prezentat în figura 5. Lagărele au fost considerate rigide, în programul de calcul luîndu-se valori mari



Număr elemente = 4

Lagăre rigide : $Ky = Kz = 10^{12}$ N/m

Masa arborelui	Modul	n* rot/min	n rot/min
este neglijată	1	8148	8154
	2	26130	26220
nu este neglijată	1	–	6790
	2	–	23754

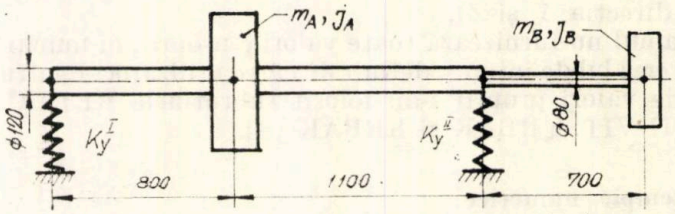
Obs.: n* calculat în [9]

Fig. 5

pentru constantele elastice. Se observă buna concordanță a turațiilor critice utilizînd programul ROTOR comparativ cu cele obținute, prin metoda matricelor de transfer, de către Babakov [9], pentru cazul în care se neglijează masa arborelui.

În lucrarea [10] Krämer ține cont de masa arborelui din figura 6, repartizînd-o însă în nodurile elementului. Și în acest caz se observă buna corelare dintre rezultate.

În figura 7 este reprezentată dependența turațiilor critice, corespunzătoare primelor trei moduri de vibrație, în funcție de rigiditatea lagărelor.



Turația critică / Modul	1	2	3	4
n*[rot/min]	427	852	1867	2672
n [rot/min]	426,7	851,6	1866	2666

Obs: n* calculat în [10]

Fig. 6

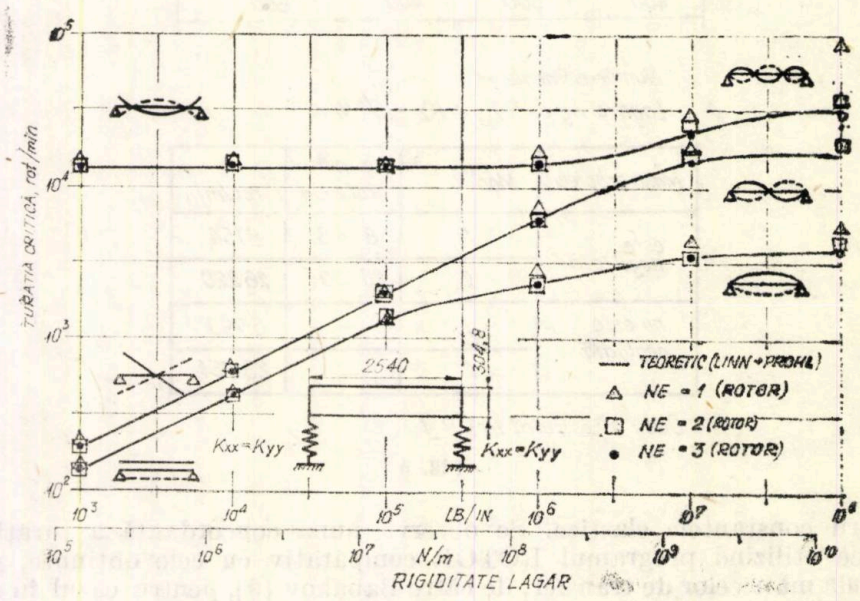


Fig. 7

Se compară rezultatele obținute de Linn și Prohl [11] cu cele calculate cu programul ROTOR pentru un număr diferit de elemente ($NE = 1$, $NE = 2$, $NE = 3$). Rotorul „Linn și Prohl" este un arbore cu diametrul de 304,8 mm (12 in) și de lungime 2,54 m (100 in). Așa cum se observă din figura 7, turațiile critice corespunzătoare numărului de elemente egal cu trei se situează pe linia obținută teoretic de Linn și Prohl, eroarea ε crescînd cît numărul de elemente în care se împarte arborele este mai mic, iar rigiditatea lagărelor mai mare (fig. 8).

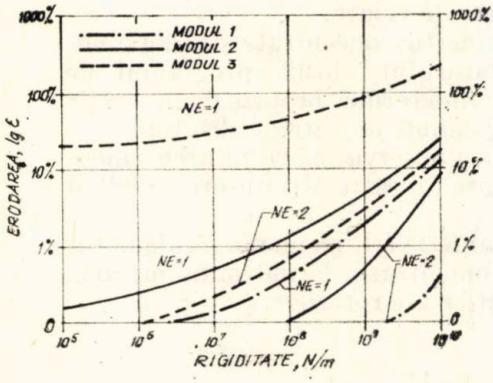
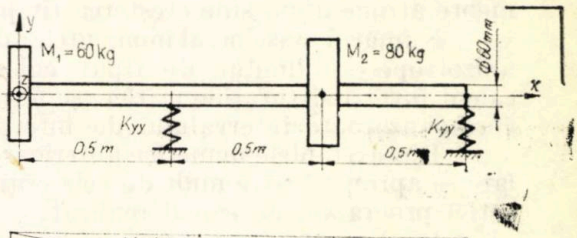


Fig. 8



Modul / Turația critică	1	2
n* [rot/min]	1184	3486
n [rot/min]	1184	3389

n* calculat în [9]

Fig. 9

Neglijînd masa arborelui din figura 9 se obține o necorelare de 2,75% între turația critică calculată cu ROTOR și cea calculată de către Babakov [9], corespunzătoare modului al doilea de vibrație. Dacă însă se ține cont de masa arborelui și în plus și de momentele de inerție ale celor doi volanți $J_1 = 5$ kgm² și $J_2 = 10$ kgm², primele opt turații critice și forma modurilor proprii corespunzătoare, obținute cu programul de calcul realizat, sînt reprezentate în figura 10, pentru rigidități diferite ale lagărelor în cele

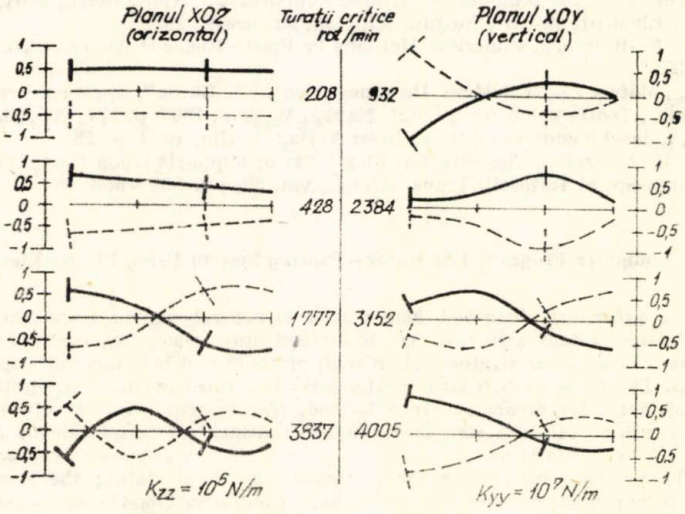


Fig. 10

două plane ($K_{zz} \neq K_{yy}$). Se observă că în planul XOZ, datorită unei rigidităţi K_{zz} relativ mici a lagărului pe direcţia OZ, primele două moduri de vibraţie corespund mişcării de corp rigid a rotorului.

5. Concluzii

Rezultatele obţinute cu programul de calcul sînt cu atît mai exacte cu cît numărul de elemente este mai mare, dar mărirea numărului de elemente atrage după sine creşterea timpului de rulare.

Numărul maselor, al momentelor de inerţie concentrate şi al lagărelor anizotrope este limitat, de tipul calculatorului folosit, programul de calcul furnizînd turaţiile critice şi forma modurilor proprii de vibraţie corespunzătoare intervalului de interes, definit de către utilizator.

Din exemplele numerice anterioare s-a observat că rezultatele calculate se apropie foarte mult de cele obţinute de către alţi autori, validînd astfel programul de calcul realizat.

Implementarea programului de calcul ROTOR pe un microcalculator îi măreşte eficienţa, el devenind un instrument util, la îndemîna oricărui inginer proiectant în aflarea turaţiilor critice ale rotorilor.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. A. Prohl*, „A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors", Trans. ASME, vol. 67, J. of Appl. Mech., vol. 12, p. A-142
2. *N. O. Myklestad*, „Numerical Analysis of Forced Vibrations of Beams", Journal of Applied Mechanics, vol. 20, Trans. ASME, vol. 75, March, 1953, pp. 53—56
3. *J. W. Lund*. „Computer Programs for Unbalance Response and Stability, Part V", AFAPL Tech. Report TR65—45, May 1965, Wright Patterson AFB, Dayton, OH.
4. *T. M. Tang, P. R. Trumpler*, „Dynamics of Synchronous—Processing Turborotors With Particular Reference to balancing", Journal of Applied Mechanics, March 1964, pp. 115—122, March 1968, pp. 25—30
5. *E. C. Koenig*, „Analysis for Calculating Lateral Vibration Characteristics of Rotating Systems with Any Number of Flexible Supports", J. Appl. Mech., 1961, p. 585
6. *I. Pascariu*, „Elemente finite", Editura Militară, Bucureşti, 1985
7. *K. J. Bathe, E. Wilson*, „Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, 1976
8. *B. T. Smith*, „Matrix Eigen System Routines-EISPACK Guide", Springer Verlag, 1974
9. *I. M. Babakov*, „Teoria kolebanii", Izdat. Nauka, Moskva, 1968, p. 177, 209, 212.
10. *E. Krämer*, „Maschinendynamik", Springer Verlag, Berlin, 1984, p. 180
11. *F. C. Linn, M. A. Prohl*, „The Effect of Flexibility of Supports Upon the Critical Speeds of High-Speed Rotors", Trans. ASME, vol. 59, pp. 536—553.

Critical—Speed Computer Program For Rotor—Bearing System Using Finite Element Method

The procedure described herein is a structural matrix technique. The overall rotor system structure is subdivided into elements, each of which may consist of a uniform rotor section with optional end bearings and optional end disks. The rotor system structural matrix is formed from an assemblage of the individual rotor elements. Once formed, this system may be solved very efficiently using standard structural matrix routines for displacement amplitudes and for eigen-values.

The program made has been verified by recalculating the results of other well-known cases from the published literature. Good correlation was achieved in each instance.

C.Z.:621.6.03

ASUPRA UNOR PROBLEME DE CINEMATICA CURGERII FLUIDELOR VISCOASE

C. BĂLAN*

Prin prisma teoriei mecanicii mediilor continue se tratează două probleme de cinematica curgerii fluidelor viscoase : legătura dintre tensorul Green-Cauchy și tensorii Rivlin-Ericksen și necesitatea folosirii mulțimilor deschise cu perimetru finit pentru descrierea formelor corpurilor din mecanica mediilor continue. Lucrarea se constituie ca o mică contribuție la promovarea modelului de studiu al mecanicii și termodinamicii raționale, în evoluția și dezvoltarea căruia lucrările și activitatea științifică a prof. Clifford Truesdell au o importanță determinantă.

1. Introducere

Mecanica mediilor continue reprezintă un model de studiu al mișcării și deformării corpurilor în care toate mărimile fizice folosite au proprietatea de a fi cîmpuri definite pe domeniile spațiale ocupate de corp (cîmpul vitezelor, presiunilor, forțelor etc.).

În conformitate cu teorema Lebesque—Radon—Nicodym, pentru orice măsură G absolut continuă indusă pe $\mathscr{D}$-domeniul spațial ocupat de corpul $\mathscr{B}$ — există densitatea măsurii $g(x)$ cu proprietatea

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\vartheta}, \quad G = \int_{\mathscr{D}} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\vartheta \tag{1}$$

(în particular $G = m$ masa corpului, $g(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$ densitatea masică).

Ca orice teorie științifică [1], mecanica rațională a mediilor continue are la bază un sistem axiomatic ce cuprinde : conceptele primare, axiomele, postulatele și teoremele teoriei.

Asupra celor trei părți ce alcătuiesc mecanica mediilor continue, cinematica, dinamica și teoria relațiilor constitutive, se fac următoarele precizări :

a) Dinamica are un puternic caracter axiomatic ; legile de mișcare, conservare și echilibru, încadrate în noțiunea de principii generale, sînt axiome ale mecanicii mediilor continue.

---

* Asist. ing., catedra Hidraulică și mașini hidraulice

b) Cinematica descrie posibilitățile de mișcare și deformație ale corpurilor; avînd în vedere lipsa caracterului axiomatic specific, este capitolul cu dezvoltările matematice cele mai laborioase. În ultima vreme, prin fundamentarea teoriei relațiilor constitutive de către C. Truesdell, W. Noll, B. D. Coleman ș.a. cinematica a devenit capitolul central (și cel mai dificil) al mecanicii raționale a mediilor continue.

c) Prin intermediul relațiilor constitutive (de material) „se racordează" dinamica cu cinematica. Teoria actuală a relațiilor constitutive și-a pierdut caracterul pur axiomatic prin introducerea unor postulate specifice: postulatul determinismului, acțiunii locale etc. (prin postulat se înțelege o axiomă pe baza căreia se construiesc teoreme verificabile prin experiență). Atît dinamica, cît mai ales teoria relațiilor constitutive, introduc *restricții* cinematice în mișcarea și deformația corpului.

2. Tensorul Green-Cauchy și relația Rivlin—Ericksen

Prin tensor se înțelege o transformare liniară a spațiului vectorial $\mathscr{V}$ pe el însuși

$$T : \mathscr{V} \to \mathscr{V}, \tag{2}$$

pentru fiecare $\mathbf{a} \in \mathscr{V}$ există un unic $\mathbf{b} \in \mathscr{V}$, astfel încît

$$\mathbf{b} = T\mathbf{a} \tag{3}$$

Interpretarea cinematică a acestei transformări sugerează conținutul a trei mișcări distincte, figura 1; translația 1, rotația 2 și deformația 3.

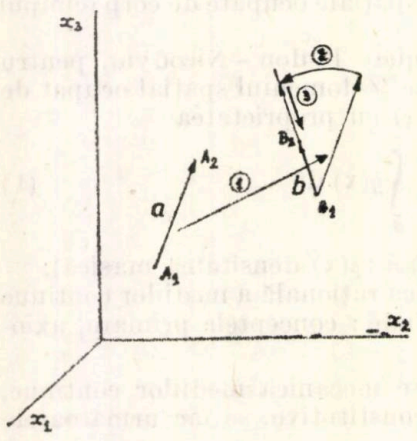


Fig. 1 — Transformarea $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$

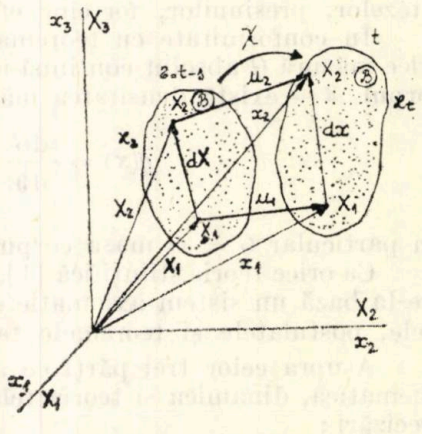


Fig. 2 — Configurațiile $\varkappa_\tau$ și $\varkappa_t$ ale corpului în mișcarea χ

De remarcat că transformarea liniară T indică locul unde s-au deplasat punctele A_1 și A_2 — ce definesc vectorul **a** — și nu modul în care s-a deplasat vectorul **a** [6].

Din calculul tensorial trebuie reținute cele două descompuneri fundamentale ale transformării [7]:

1) $T = 1/2(T + T^T) + 1/2(T - T^T) = T_S + T_{AS}$, unde T_S este un tensor simetric și T_{AS} este un tensor antisimetric.

2) $T = SO$ — descompunerea polară — în care $OO^T = OO^{-1} = I$ și $S = S^T$

Fie $\mathscr{B}_t \subset \mathscr{B}$ un subcorp al corpului $\mathscr{B}$ — deci o mulțime deschisă în $\mathscr{B}$ — și

$$\mathbf{x} = \chi(X, t) \tag{4}$$

poziția spațială a punctului material $X \in \mathscr{B}$ la timpul t. Homeomorfismele stabilite între $\mathscr{B}$ și $\mathscr{E}$ — spațiul punctual tridimensional euclidian, cînd $t \in \mathscr{T}$ este variabil, poartă denumirea de configurații $\varkappa_t = \chi(\mathscr{B}, t)$ iar aplicația

$$\chi : \mathscr{B} \to \mathscr{D} \tag{5}$$

de mișcare a corpului $\mathscr{B}$ [8].
Se consideră două configurații ale corpului $\mathscr{B}$ într-o mișcare χ

$$\varkappa_\tau = \chi(\mathscr{B}, \tau) \quad \text{și} \quad \varkappa_t = \chi(\mathscr{B}, t)$$

cu $X = \chi(X, \tau)$ și $\mathbf{x} = \chi(X, t)$ pozițiile punctului material X în cele două configurații, figura 2.

Punctele spațiale X_1 și X_2 determină în configurația $\varkappa_\tau$ vectorul $\mathrm{d}X$ iar punctele spațiale $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ determină în configurația $\varkappa_t$ vectorul $\mathrm{d}\mathbf{x}$. Aproximația liniară a mișcării (5) este dată de relația

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = F\,\mathrm{d}X, \qquad \mathrm{d}\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial X_j}\,\mathrm{d}X_j \tag{6}$$

în care $F = F_\tau(t)$ definește configurația la momentul t față de momentul τ. Funcția F astfel definită poartă denumirea de gradientul deformației și are interpretarea unei deformații relative dacă $\varkappa_\tau$ este considerată configurația de referință (în acest caz X_i reprezintă coordonatele materiale iar x_i coordonatele spațiale). Relația (6) mai poate avea următoarea interpretare: orice funcție ce descrie o proprietate a unui mediu continuu este un cîmp în $\mathscr{D}$ [1] și admite o dezvoltare în serie pentru orice punct spațial interior lui $\mathscr{D}$

$$f(\mathbf{x}) = f(X) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial X_j}\,\mathrm{d}X_j + \dots \tag{7}$$

Cu $\mathbf{x} = X + \mathbf{u}(X)$, unde $\mathbf{u}(X)$ reprezintă deplasarea punctului material, se obține diferența dintre lungimea distanțelor definite de punctele materiale X_1 și X_2 în cele două configurații [6].

$$\mathrm{d}\mathbf{x}^2 - \mathrm{d}X^2 = \mathrm{d}X(F^TF - I)\mathrm{d}X \tag{8}$$

în care $C = F^T F$ reprezintă tensorul Green—Cauchy ce caracterizează starea de deformație a unui mediu continuu.

În accepțiunea actuală, modelul de mediu continuu este clădit pe noțiunea de punct material, mai precis perechi de puncte materiale infinit apropiate asamblate prin cîmpuri de proprietăți într-un corp $\mathscr{B}$. Prin corp se înțelege o mulțime închisă si conexă (deci și compactă) a cărui măsură $m(\mathscr{B})$ poartă denumirea de masă. Admițînd această interpretare a modelului mediului continuu tensorii cinematici Rivlin—Ericksen se obțin astfel [2]:

— Fie $\mathbf{u}_1$ și $\mathbf{u}_2$ deplasările punctelor materiale X_1 și X_2 din configurația $\varkappa_r$ în configurația $\varkappa_t$, figura 2, variația timpului fiind cuprinsă de la $-s$ la zero.

$$\mathbf{u}_1 = -V_1 s + (\mathbf{a}_1/2)s^2$$

$$\mathbf{u}_2 = -V_2 s + (\mathbf{a}_2/2)s^2 \tag{9}$$

Se obține $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}X + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = \mathrm{d}X + (V_2 - V_1)s + (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)s^2/2 =$

$$\mathrm{d}X - \Delta V s + \Delta \mathbf{a}\, s^2/2$$

$$\mathrm{d}\mathbf{x}^2 - \mathrm{d}X^2 = -(\mathrm{d}X\Delta V + \Delta V \mathrm{d}X)s + ((\Delta V)^2 + \Delta \mathbf{a}\mathrm{d}X)^2 s^2/2 +$$

$$+ \mathscr{O}(s^3) = -\mathrm{d}X(L^T + L)\mathrm{d}X\, s +$$

$$+ \mathrm{d}\mathbf{x}(L_2^T + 2L^T L + L_2)\mathrm{d}\mathbf{x}\, s^2/2 + \mathscr{O}(s^3) \tag{10}$$

în care $\dfrac{\Delta V}{\Delta X} \cong \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X}$, deci se presupune că $\Delta X \to 0$, deformația studiindu-se în vecinătatea unui punct, punctele materiale se consideră infinit apropiate, mediul transformîndu-se din discret în continuu. Mai mult, derivatele funcție de coordonatele materiale X se înlocuiesc cu derivatele funcție de coordonatele spațiale $\mathbf{x}$, implicit se admite ipoteza micilor deformații și se confundă, la acest nivel, descrierea materială cu cea spațială.

În (9) și (10) s-au folosit notațiile:

$$L = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \operatorname{grad} V, \qquad L_2 = \operatorname{grad} \mathbf{a} \tag{11}$$

V și $\mathbf{a}$ reprezentînd viteza și accelerația punctului material considerat.

Din (8) și (10) se obține forma tensorului Green-Cauchy

$$C = C_t(s) = I - A_1 s + A_2 s^2 \tag{12}$$

în care $$A_1 = L^T + L, \quad A_{n+1} = \mathrm{d}A_n/\mathrm{d}t + L^T A_n + A_n L \tag{13}$$

reprezintă tensorii Rivlin-Ericksen.

Acest rezultat este remarcabil deoarece în toate curgerile viscometrice tensorul Green-Cauchy are forma (12) [3].

Prin curgere viscometrică se înțelege o curgere în care istoria (dependența de timp) gradientului deformației relative $F(s)$ diferă de relația

$$F(s) = I - sM, \qquad \mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

numai printr-o schimbare a sistemului de referință. Funcția $\gamma = \gamma(\mathbf{x}, t)$ poartă numele de variația de forfecare [4].

Aplicațiile practice ale curgerilor viscometrice sînt foarte importante, ele constituind modelul teoretic pe baza căruia se proiectează viscozimetrele necesare determinării experimentale ale funcțiilor de material. Fără a constitui o relație de echivalență, se poate asimila o curgere viscometrică cu o curgere laminară ce are loc pe suprafețe paralele, în care fiecare „strat" de fluid se deplasează ca o suprafață materială independentă.

Avînd în vedere modul de obținere a structurii cinematice prezentate, autorul consideră că extinderea ei și la alte tipuri de mișcări nu este întotdeauna riguros justificată.

Folosirea la toate mișcările laminare a sistemului de ecuații Navier-Stokes—pentru care în (12) $A_2 \cong 0$ — este o astfel de extindere, rezultatele analitice sau numerice nefiind întotdeauna în concordanță cu realitatea fizică (se exclud din discuție cazurile de instabilitate a soluției numerice sau de neunicitate a soluției).

Se consideră că o problemă deschisă de studiu, de mare importanță teoretică și practică, este dezvoltarea unei structuri cinematice capabilă să modeleze mișcarea turbulentă și compatibilă cu ecuațiile de echilibru termodinamice.

3. Mulțimi deschise cu perimetru finit

Stabilirea ecuațiilor de echilibru din mecanica mediilor continue se bazează pe următoarele relații integrale:

— relația transportului de proprietate a lui Reynolds

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{D}(t)} \psi \,\mathrm{d}m = \int_{\mathscr{D}(t)} \rho \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\mathscr{D}(t)} \rho\sigma\,\mathrm{d}\vartheta + \int_{\partial\mathscr{D}(t)} \varphi_{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}A \tag{14}$$

în care m și ρ reprezintă masa respectiv densitatea corpului, $\partial\mathscr{D}$ frontiera închisă a corpului caracterizată de normala $\mathbf{n}$, ψ o proprietate asociată lui $\mathscr{B}$ (un cîmp definit pe $\mathscr{D}$), φ fluxul proprietății ψ prin $\partial\mathscr{D}$, σ creșterea proprietății ψ în $\mathscr{D}$.

— teorema gradientului

$$\int_{\mathscr{D}} \nabla\psi \,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\partial\mathscr{D}} \psi\mathbf{n}\,\mathrm{d}A \tag{15}$$

— lema integralei nule

$$\int_{\mathcal{D}} \psi \, d\vartheta = 0 \Rightarrow \psi \cong 0 \tag{16}$$

În toate aceste relații se presupune că ψ este o funcție continuă și diferențiabilă iar $\mathcal{D}$ și $\partial\mathcal{D}$ sînt domenii spațiale netede.

De remarcat că (14) și (16) sînt valabile pentru punctele interioare domeniului $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0 \cup \partial\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^0$ mulțimea punctelor interioare lui $\mathcal{D}$.

Una din problemele cele mai importante din mecanica mediilor continue este alegerea unei clase de mulțimi, corespunzătoare modelării corpurilor fizice, care să permită aplicarea relațiilor (14)—(16), [8]. (reuniunea a două submulțimi deschise să fie o submulțime deschisă — mulțime alcătuită numai din puncte interioare—, frontiera submulțimii să fie suficient de netedă astfel încît, în fiecare punct al ei, să fie definit vectorul normală).

Această clasă este reprezentată de *mulțimile cu perimetru finit*, definite astfel :

Dacă $\mathcal{C}$ este o mulțime Borel în spațiul euclidian $\mathcal{E}$, se definește perimetrul lui $\mathcal{C}$, per $\mathcal{C}$ ca

$$\text{per } \mathcal{C} : \sup \left\{ \int_{\mathcal{C}} \operatorname{div} \mathbf{g} \, d\vartheta, \ |\mathbf{g}(\mathbf{x})| \leqslant 1, \ \mathbf{g} \in C_0^1(\mathcal{E}, \mathcal{V}) \right\} \tag{17}$$

În cazul în care per $\mathcal{C}$ este finit $\mathcal{C}$ poartă denumirea de mulțime cu perimetru finit și, dacă $\partial\mathcal{C}$ are un plan tangent în fiecare punct al ei iar normala la acest plan este o funcție continuă de $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}$ atunci per $\mathcal{C} = A(\partial\mathcal{C})$, aria frontierei lui $\mathcal{C}$.

Punctele în care se definește normala exterioară alcătuiește frontiera redusă $\partial^*\mathcal{C}$ ce este o submulțime a lui $\partial\mathcal{C}$, deci $\partial\mathcal{C} = \partial^*\mathcal{C}$ dacă în fiecare punct al frontierei se poate duce un singur și unic plan tangent.

Cu această precizare teorema gradientului se poate enunța astfel :

Pentru orice funcție continuă $\psi : \mathcal{C} \to \mathrm{R}$, diferențiabilă și integrabilă pe $\mathcal{C}$, există

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla \psi|_{\mathcal{C}} \, d\vartheta = \int_{\partial^*\mathcal{C}} \psi n_{\mathcal{C}} \, dA \tag{18}$$

Relația (18) reprezintă o restricție la formula (15) deoarece în cazul general $\partial^*\mathcal{C}$ nu este identică cu $\partial\mathcal{C}$ —pe suprafața corpului pot exista puncte în care se definesc plane tangente dar nu și o normală unică.

Aceste construcții matematice fac parte din structura fundamentală a mecanicii raționale a mediilor continue.

Fără să fie folosit direct în aplicarea teoriei, modelul matematic al corpurilor materiale trebuie cunoscut. Orice aproximație, orice formulă folosită trebuie să se bazeze pe rigoarea și precizia proprie formalismului matematic.

În ultimii ani ε-au obținut numeroase soluții numerice ale ecuațiilor de echilibru din mecanica mediilor continue ; dezvoltarea tehnicii de calcul

a permis abordarea unor probleme complexe : mişcări nestaţionare, curgeri turbulente etc.

Totuşi pînă în prezent, rezultatele nu sînt cele scontate.

Numeroşi cercetători îmbrăţişează această cale de rezolvare a problemelor. Mai puţini însă sînt aceia care încearcă să verifice valabilitatea ecuaţiilor, să construiască noi ecuaţii, noi modele mai exacte şi mai riguroase.

Autorul consideră că punerea în discuţie a unor probleme de bază ale mecanicii mediilor continue va conduce, în procesul de învăţămînt dar mai ales în activitatea de cercetare ştiinţifică, la o revizuire a ponderii pe care trebuie să o aibă dezvoltarea structurii teoriei — formarea unui sistem axiomatic corect, formularea unor noi ecuaţii de echilibru, delimitarea domeniului de valabilitate al teoriei, folosirea unui limbaj matematic modern — faţă de căutarea unor soluţii analitice sau numerice a ecuaţiilor clasice.

BIBLIOGRAFIE

1. *C. Bălan*, „Elemente de filosofia ştiinţei aplicate teoriei mecanicii mediilor continue", lucrarea absolvire Univ. Politică şi de Conducere I.P.B. 1988
2. *G. Böhme*, „Strömungsmechanik nicht-newtonscher fluide", B. G. Teubner, Stuttgart, 1981
3. *B. D. Coleman*, „Kinematical conceps with applications in the mechanics and thermodynamics of incompressible viscoelastic fluids", Arch. Rat. Mech. Anal. 9, 1962
4. *B. D. Coleman, H. Markovitz, W. Noll*, „Viscometric flows of non-newtonian fluids" Springer-Verlag, 1966
5. *M. E. Gurtin, W. O. Williams, W. P. Ziemer*, „Geometric measure theory and the axioms of continuum thermodynamics", Arch. Rat. Mech. Anal., 92, 1986
6. *L. E. Malvern*, „Introduction to the mechanics of a continuous medium", Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, 1969
7. *D. Lazăr*, „Mecanica mediilor continue", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1983
8. *C. Truesdell*, „A first coures in rational continuum mechanics", Academic Press, New York-San Francisco-London, 1989

Two Problems in Kinematics of Viscous Fluid Flow

The paper is concern, by the mechanics of continuous medium theory, with two problems of viscous fluid flow kinematics : the connection between the Green-Cauchy tensor and the Rivlin-Ericksen tensors and the necessity of use the sets of finite perimeter for the material body description — the univers of shapes. The author shows that the kinematics of the continuous medium is found by "the couple of substantial points" notion. One of the paper conclusion is that the extrapolation of the actual kinematical structure to the other flows, like turbulence flow, is not always justifiable. The paper is a small contribution to the promotion of the rational mechanic way of study ; it is dedicated to prof. Clifford Truesdell.

BOOKS

R. Voinea, D. Voiculescu, Fl. P Simion, INTRODUCERE ÎN MECANICA SOLIDULUI CU APLICAȚII ÎN INGINERIE/Solid—State Mechanics with Applications in Engineering, Ed. Academiei, București, 1988, 1152 p.

Contents. I. Part One : Classical (Newtonian) Mechanics ;

A. **Introduction** : Fundamentals and principles of classical mechanics ; physical magnitudes ;

B. **Elements of mass geometry** ; centers of mass (centers of gravity) ; moments of inertia ;

C. **Statics** : Statics of a particle ; systems of sliding vectors ; statics of a rigid body ; statics of a system of particles and rigid bodies ; statics of a system of hinged bars ; statics of strings ;

D. **Kinematics** : Kinematics of a point ; kinematics of rigid bodies ; kinematics of the relative motion of a particle ; kinematics of the relative motion of a rigid body ; kinematics of a system of rigid bodies ;

E. **Dynamics** : Dynamics of a particle ; dynamics of a system of particles ; dynamics of a rigid body ; dynamics of relative motion ; impacts ; dynamics of systems of variable mass.

II. Part Two : Analytical mechanics ; Principles of analytical mechanics ; Lagrange's equations ; Hamilton's equations ; Variational principles ; Poisson's brackets ; Canonic transformations ; The Hamilton-Jacobi equation with partial derivatives.

III. Parte Three : Mechanics of Elastic Continuous Media

A. General theory of elastic continuous media ;

B. Elementary theory of elastic continuous media (strength of materials) ;

C. Exact theory of an elastic continuous medium ;

D. Theory of elastic plates ;

E. Theory of elastic thin walled bars ;

F. Approximate methods used in elasticity problems ;

IV. Part Four : Fundamentals of Plasticity and Rheology Theory

V. Part Five : Dynamic Loading

VI. Part Six : Mechanical Vibrations

A. Elastic stability of beams and systems of beams ;

B. Elastic stability of plane curved beams, in their plane ;

C. Static stability of beams subjected to bending (lateral buckling) ;

D. Elastic stability of plane plates ;

E. Stability of thin curved plates.

St. Petrescu, V. Petrescu, METODE ȘI MODELE ÎN TERMODINAMICA TEHNICĂ (corelați cu legea conservării și transformării energiei)/Methods and Models in Technical Thermodynamics (Correlations with the Law of Energy Conservation and Transformation), Editura Tehnică, București, 1988, 268 p.

This book deals with the following topics :

— thermodynamics-science of heat motion ;
— knowledge process in phenomenological thermodynamics ;
— method of systematic-interactional approach in phenomenological thermodynamics ;
— fundamental thermodynamics and the three applied thermodynamics (physical, chemical and technical) ;
— methods for explaining and deducing state equations, methodic implications of existance and knowledge of state equations ;
— processing methods and related models (thermodynamical systems) to law of energy conservation and transformation significance of terms : enthalpy, mechanical work ;
— (unitary) conception of system-interaction-cause applied to approaching, processing and utilization of principle I ;
— importance and essence of thermodynamical methods.

P. Dodoc, TEORIA ȘI CONSTRUCȚIA APARATELOR OPTICE/ Theory and Building of Optical Apparatus, Vol. I—II, Editura Tehnică, București, 1989.

The first volume presents the components of fundamental optical apparatus as well as physical phenomena determining their operation : optical elements and systems, radiation sources and receivers, oyster optical systems, non-oyster optical systems, design methods of an oyster optical system, basic optical apparatus.

The second volume describes basic optical apparatus (continued), theory and building of optical and optoelectronical outfits for measurement, positioning and making out of the measured component, geodesy apparatus, trial of optical apparatus.

The book is addressed to engineers, technologists and to all those involved in building and working these outfits.

A. Tudor, Gh. Prodan, C. Muntean, R. Motoiu, DURABILITATEA ŞI FIABILITATEA TRANSMISIILOR MECANICE/ Durability and Reliability of Mechanical Transmissions, Editura Tehnică, Bucureşti, 1988, 253 p.

The work is analysing all the phenomena which condition the durability and reliability of mechanical transmissions.

The concepts of reliability, maintenance availability and durability are defined ; possible troubles are presented per types of causes ; it is shown the way in which the reliability indicators are determined and checked and the lubrication of mechanical transmissions is also dealt with as a determinant phenomenon of durability. Then the durability and reliability of components (gearings, bearings, chains, belts shafts, assembly parts and packings) are analysed, as well as those of the mechanical transmission as a system based on models, and the calculation of provisional reliability and the determination of constraints are presented.

The work will contribute to optimizing the mechanical transmission design and operation by considering all the operation, execution, and maintenance parameters. The book is meant for engineers working in the design, reserach and operation of machines and equipment, as well as for students of mechanical engineering.

N. Vasiliu, I. Cătană, TRANSMISII HIDRAULICE ŞI ELECTROHIDRAULICE. VOLUMUL. 1. MAŞINI HIDRAULICE VOLUMICE ./ Hydraulic and Electrohydraulic Power Systems Volume I : Displacement Pumps and Motors, Editura Tehnică, Bucureşti, 1988, 344 p.

The book represents the first work from the cycle titled ,,Hydraulic and electrohydraulic power systems", which is directed towards the analysis and design of control systems whose power elements are hydraulic or electrohydraulic.

The first book, titled ,,Displacement Pumps and Motors" deals with the hydraulic problems of these machines, and namely : hydraulic fluids, fluid mechanics for hydraulic power systems, positive displacement pumps amd motors, performances curves and parameters for positive-displacement pumps and motors, computer-aided design of positive displacement pumps and motors.

The book contains a great number of numerical applications, performed by computer aid.

J. Unger, KONVEKTIONSSTRÖMUNGEN mit 195 Bildern und 20 Aufgaben mit Lösungen, Teubner Studienbücher, Mechanik, B. G. Teubner, Stuttgart, 1988

The book of Prof. Dr. Eng. Jochem Unger comprises : topics on 1D free convection (momentum, fenergy, mass continuity and constitutive equations for gas and fluid, Boussinesq approximation, some topics on the stability of thermally driven flows), 2D laminar convective flows (through ducts, chanels and around plates), main differences between free and forced convection, convection in porous media and turbulent convection, an over view on heated walls, cooling systems and thermal and hydrodynamical stability of free convective systems, relevant details on Ra-equivalent vertical ducts and equivalent models, an overview of the mechanical and thermal energies carried by the convective fluid and their usages, and, finally, a collection of practical problems encountered in certain thermal devices as well as their solutions.

Although the book is intended to use as few as possible definitions and equations, the mathematical modelling trend is obvious and, as such, relevant for the topics.

The book itself is impressive and certainly is an important aid for students and engineers interested in thermal convection.

TEZE DE DOCTORAT SUSȚINUTE ÎN 1988—1989

Cristian Nicolae Andreescu — Studiul fenomenului de dispersie ciclică la motoarele cu aprindere prin scînteie funcționînd în regimuri de sarcini parțiale (21.VII.1988) Conducător științific prof. dr. ing. Berthold Grünwald

Victor Gheorghiu — Simularea și optimizarea ciclului termic al motoarelor cu ardere internă prin intermediul calculatoarelor numerice (22.VII.1988) Conducător științific prof. dr. ing. Berthold Grünwald

Sergiu Băloiu — Cercetări ale proceselor energetice din motoarele cu aprindere prin comprimare supraalimentate (22.VII.1988) Conducător științific prof. dr. ing. Berthold Grünwald

Zaharie Morariu — Studiul aspectelor termice și a implicațiilor tribologice la grupurile de etanșări frontale folosite la pompe și agitatoare în industria chimică (16.XII.1988) Conducător științific prof. dr. docent Dan Pavelescu

Mihaela Păunescu — Comportarea îmbinărilor cu flanșe ale recipientelor sub presiune la oboseală, la număr redus de cicluri, la presiuni mici și mijlocii (18.I.1989) Conducător științific prof. dr. ing. Mihai Renert

Gheorghe Irodan — Influența ungerii asupra capacității portante a angrenajelor cilindrice cu dantura cementat—călită (17.VI.1989) Conducător științific prof. dr. docent Dan Pavelescu

Ion Stiharu — Studiul și perfecționarea lagărelor de alunecare cu frecare în regim de ungere la limită și mixtă la limită în construcția de aparate (21.VI.1989) Conducător științific prof. dr. docent Traian Demian

c. 1503 — Tipografia Universul

40.480

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ELECTROTEHNICA, ENERGETICA, AUTOMATICA-CALCULATOARE, ELECTRONICA, MECANICA, CONSTRUCŢII DE MAŞINI TRANSPORTURI-AERONAVE, CHIMIE, METALURGIE

apare în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physiques pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" şi „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din institut. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa privind articolele, schimburile de publicaţii şi abonamentele se fac pe adresa institutului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭНЕРГЕТИКА, АВТОМАТИКА-СЧЕТНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ, ЭЛЕКТРОНИКА, МЕХАНИКА, МАШИНОСТРОЕНИЕ, ТРАНСПОРТ—САМОЛЕТОСТРОЕНИЕ ХИМИЯ, МЕТАЛУРГИЯ

продолжает прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" и „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Составленный на новых основах он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут опубликоваться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ELECTROTECHNICS, ENERGETICS, AUTOMATIC CONTROL-COMPUTERS, ELECTRONICS, MECHANICS, MACHINE BUILDING, TRANSPORT-AERONAUTICS, CHEMISTRY, METALLURGY

The Bulletin continues the old scientific periodicals · „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" and „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti"

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ELECTROTECHNIQUE, ENERGETIQUE, AUTOMATIQUE-ORDINATEURS, ELECTRONIQUE, MECANIQUE, CONSTRUCTIONS MECANIQUES, TRANSPORTS-AERONAUTIQUE, CHIMIE, METALLURGIE

continues les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" et „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
ROMÂNIA

Splaiul Independenţei nr. 313
Căsuţa Poştală nr. 2356

1991 MAR 11

LEI 35